Méthode de solution en série pour l'équation de réaction-diffusion sur les intervalles finis

Series solution method for the reaction-diffusion equation over finite intervals

Edoh Tossou[1], Kwassi Anani[2] et Roger Prud'homme [3]

[1] Doctorant, Laboratoire d'Analyse, de Modélisation Mathématique et Applications, Département de Mathématiques, Faculté des Sciences, Université de Lomé, tossoud35@gmail.com
[2] Maitre de conférences, Laboratoire d'Analyse, de Modélisation Mathématique et Applications, Département de Mathématiques, Faculté des Sciences, Université de Lomé, kanani@univ-lome.tg
[3] Anciennement Directeur de Recherches Emérite, Jean Le Rond d'Alembert Institute, UMR 7190 CNRS, Université de Sorbonne, roger.prudhomme@sorbonne-universite.fr

RÉSUMÉ. La principale contribution de ce document est la généralisation de la solution en série classique, pour des problèmes de valeurs limites de l'équation de réaction-diffusion unidimensionnelle, sur tout intervalle fini. La forme générale de l'équation est considérée sur un intervalle borné générique et est soumise de manière unifiée aux trois conditions aux limites classiques, à savoir les conditions de Neumann, de Dirichlet et de Robin. La méthode de décomposition de Fourier via la théorie de Sturm-Liouville est appliquée à l'équation homogène résultante avec des conditions aux limites nulles. Ensuite, la solution de l'équation non homogène avec conditions aux limites homogènes est déduite en utilisant le principe de Duhamel. La solution du problème général est obtenue comme une série convergente sur l'intervalle considéré avec la construction d'une fonction auxiliaire satisfaisant aux conditions aux limites non homogènes. Grâce à la transformation de Hopf-Cole, la méthode décrite a permis la généralisation de la solution exacte de l'équation de Burgers sur des intervalles génériques.

ABSTRACT. This paper makes a contribution by generalizing the classical series solution for initial boundary value problems of the one-dimensional reaction-diffusion equation on any finite interval of the real line. The general form of the equation is considered on a generic bounded interval and is subjected in the unified way to the three classical boundary conditions, namely the Neumann, Dirichlet, and Robin boundary conditions. The Fourier decomposition method, is used to derive the solution of the resulting homogeneous equation with zero boundary conditions. Subsequently, the solution of the nonhomogeneous equation with homogeneous boundary conditions is obtained using the Duhamel's principle. Finally, the solution of the general problem is obtained as a convergent series over the considered interval, with the construction of an auxiliary. The Hopf-Cole transformation has facilitated the generalization of the exact solution of the Burger's equation to generic intervals, as demonstrated by the described method.

MOTS-CLÉS. Transfert de chaleur, Principe de Duhamel, Théorie de Sturm-Liouville, Méthode de décomposition de Fourier, Equation de Burgers.

KEYWORDS. Heat transfer, Duhamel principle, Sturm-Liouville theory, Fourier decomposition method, Burgers equation.

1. Introduction

L'équation différentielle linéaire parabolique

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,t)=a^2\frac{\partial}{\partial x^2}u(x,t)+\eta\frac{\partial}{\partial x}u(x,t)-bu(x,t)+f(x,t), \qquad (1)$$

est connue comme l'équation unidimensionnelle de propagation de chaleur. La fonction $u(x,t)$ est la distribution de température à déterminer. Le coefficient $a>0$ est lié à la diffusivité constante du transfert de masse ou de chaleur. Les cinq termes dans l'équation précédente représentent respectivement, le terme transitoire, de diffusion, de convection, de réaction et le terme source. Le coefficient constant η désigne la vitesse de la substance diffusante participant au mouvement de la matière dans le cas où une telle possibilité est considérée. Dans le cas d'une possibilité d'échange de chaleur ou de matière avec l'environnement extérieur, b est le coefficient de désintégration $(b<0)$

ou de multiplication $(b > 0)$. L'équation (1) étant à coefficients constants, elle se réduit à l'aide d'un changement approprié de variable en une équation de réaction-diffusion c'est-à-dire sans le terme de convection (voir [1]). Ainsi, l'équation (1) devient :

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x,t) = a^2 \frac{\partial}{\partial x^2} u(x,t) - bu(x,t) + f(x,t). \tag{2}$$

Très souvent cette équation est considérée sur les intervalles de type $[0,l]$ donnant ainsi un problème parabolique de valeurs aux initiales et limites. Le problème de l'équation de réaction-diffusion présente plusieurs applications en ingénierie. Dans ces multiples applications, quelques-unes sont, la modélisation des ions calcium et certaines protéines à l'intérieur d'une épine dendritique en mouvement [2, 3], l'échauffement et l'évaporation transitoires des gouttelettes [4, 5], diffusion de la chaleur dans des multicouches [6], etc. Pour obtenir la solution du problème de transfert de chaleur dans un domaine fini ou infini, plusieurs méthodes ont été utilisées. Parmi ces méthodes, on peut citer, la méthode de décomposition Adomian telle que développée dans [7] et [8], la méthode de perturbation homotopique (voir [9], [10]), la méthode d'itération variationnelle comme dans [11] et [12], etc. La principale méthode utilisée est la méthode de séparation de variable et la solution en série obtenue est facilement applicable aux problèmes de Stefan à un seul bord mobile. Mais pour rendre applicable cette solution aux problèmes de Stefan unidimensionnel aux deux bords mobiles, il est plus commode de considérer l'équation (2) sur un intervalle générique de la forme $[l_1, l_2]$ avec $l_1 < l_2$. Pour traiter le problème de manière générale, l'équation (2) est associée à la condition initiale :

$$u(x,0) = u_0(x) \tag{3}$$

et aux conditions aux limites écrites de manière unifiée :

$$\beta_1 u_x(l_1,t) + \alpha_1 u(l_1,t) = g_1(t), \quad {\alpha_1}^2 + {\beta_1}^2 \neq 0, \tag{4}$$

$$\beta_2 u_x(l_2,t) + \alpha_2 u(l_2,t) = g_2(t), \quad {\alpha_2}^2 + {\beta_2}^2 \neq 0. \tag{5}$$

Le but du présent travail est d'obtenir une solution facilement applicable aux problèmes unidimensionnels aux deux limites mobiles. Le problème (2)-(5) est considéré et la méthode de séparation de variables est appliquée pour obtenir une solution en série généralisée de Fourier sur tout intervalle fini de la forme $[l_1, l_2]$. Dans la section 2, la solution du problème homogène est obtenue. La section 3 est consacrée à l'équation non homogène avec les conditions limites homogènes et la solution est déduite par le principe de superposition. Ensuite, le problème (2)-(5) est considéré dans son intégralité et la solution finale est obtenue par utilisation d'une fonction auxiliaire. Dans la section 4, la méthode décrite est appliquée pour la résolution de l'équation de Burgers avec conditions de Dirichlet aux limites fixées. La conclusion résume les résultats obtenus et donne des perspectives futures.

2. L'équation homogène

Considérons l'équation linéaire parabolique unidimensionnelle:

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x,t) - a^2 \frac{\partial}{\partial x^2} u(x,t) + bu(x,t) = 0, \; l_1 < x < l_2, \qquad 0 < t < T \tag{6}$$

avec la condition initiale (3) et les conditions aux limites mixtes homogènes :

$$\beta_1 u_x(l_1,t) + \alpha_1 u(l_1,t) = 0, \qquad {\alpha_1}^2 + {\beta_1}^2 \neq 0, \tag{7}$$

$$\beta_2 u_x(l_2,t) + \alpha_2 u(l_2,t) = 0, \qquad {\alpha_2}^2 + {\beta_2}^2 \neq 0. \tag{8}$$

L'équation (6) avec les conditions (3), (7) et (8) est un problème de réaction-diffusion homogène avec conditions aux limites mixtes homogènes.

D'après la méthode de séparation de variables, supposons que la solution de l'équation (6) peut être obtenue comme produit de deux fonctions de différentes variables x et t. C'est-à-dire :

$$u(x,t) = X(x)T(t) \quad , \tag{9}$$

La substitution de celle-ci dans (6) conduit à :

$$\frac{T'(t) + bT(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\xi, \tag{10}$$

avec ξ une constante.

Autrement, nous avons les deux équations différentielles ordinaires :

$$T'(t) + (\xi a^2 + b)T(t) = 0, \tag{11}$$

$$X''(x) + \xi X(x) = 0. \tag{12}$$

Pour avoir les valeurs propres appropriées ξ, considérons l'équation (12) et les conditions aux limites homogènes (7) et (8) imposées à $u(x,t)$. Nous obtenons ainsi aux bornes l_1 et l_2, le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \beta_1 X'(l_1) + \alpha_1 X(l_1) = 0 \\ \beta_2 X'(l_2) + \alpha_2 X(l_2) = 0. \end{cases} \tag{13}$$

L'équation (12) associée aux conditions (13) est un problème de Sturm-Liouville pour la valeur propre ξ et de fonction propre correspondante $X(x)$. D'après la théorie de Sturm-Liouville (voir [1] et [13]), il existe donc une infinité de réels non-négatifs et discrets formant le spectre de valeurs propres ξ_n correspondant à l'ensemble des fonctions propres $\{X_n(x)\}$. En effet, les solutions de l'équation (12) sont sous la forme,

$$X(x) = C_1 \cos\sqrt{\xi}x + C_2 \sin\sqrt{\xi}x. \tag{14}$$

En appliquant celle-ci aux conditions (13), on obtient le système d'équations d'inconnues C_1 et C_2 suivant,

$$\begin{cases} C_1\left[\alpha_1 \cos\sqrt{\xi}l_1 - \beta_1\sqrt{\xi}\sin\sqrt{\xi}l_1\right] + C_2\left[\beta_1\sqrt{\xi}\cos\sqrt{\xi}l_1 + \alpha_1\sin\sqrt{\xi}l_1\right] = 0 \\ C_1\left[\alpha_2 \cos\sqrt{\xi}l_2 - \beta_2\sqrt{\xi}\sin\sqrt{\xi}l_2\right] + C_2\left[\beta_2\sqrt{\xi}\cos\sqrt{\xi}l_2 + \alpha_2\sin\sqrt{\xi}l_2\right] = 0 \end{cases} \tag{15}$$

Le système (15) admet une solution non triviale si et seulement si son déterminant est nul. Dans ce cas, après calculs et transformations, nous obtenons :

$$(\beta_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2)\sqrt{\xi}\cos\sqrt{\xi}(l_2 - l_1) + (\beta_1\beta_2\xi + \alpha_1\alpha_2)\sin\sqrt{\xi}(l_2 - l_1) = 0 \quad , \tag{16}$$

autrement,

$$\tan\mu = \frac{(\beta_1\alpha_2 - \alpha_1\beta_2)(l_2 - l_1)\mu}{\mu^2\beta_1\beta_2 + (l_2 - l_1)^2\alpha_1\alpha_2}, \qquad (17)$$

où $\mu = \sqrt{\xi}(l_2 - l_1)$ et $\xi = (\frac{\mu}{l_2 - l_1})^2$.

L'équation (17) admet un nombre infini de solutions μ_n et génère donc un nombre infini de valeurs propres réelles ξ_n. Ces valeurs propres sont calculées comme suit :

$$\xi_n = (\frac{\mu_n}{l_2 - l_1})^2 . \qquad (18)$$

En utilisant les transformations trigonométriques, la première équation du système (15) se met sous la forme,

$$\sqrt{\beta_1^2\xi_n + \alpha_1^2}\cos(\sqrt{\xi_n}l_1 + \theta_n)C_1 + \sqrt{\beta_1^2\xi_n + \alpha_1^2}\sin(\sqrt{\xi_n}l_1 + \theta_n)C_2 = 0, \qquad (19)$$

avec $\tan^{-1}(\frac{2a^2\sqrt{\xi_n}}{\alpha_1}) = \theta_n$, et θ_n est unique lorsqu'il est pris dans l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. En posant $A = \sqrt{\beta_1^2\xi_n + \alpha_1}\cos(\sqrt{\xi_n}l_1 + \theta_n)$ et $B = \sqrt{\beta_1^2\xi_n + \alpha_1}\sin(\sqrt{\xi_n}l_1 + \theta_n)$ l'équation (19) prend la forme :

$$AC_1 + BC_2 = 0 \Leftrightarrow \frac{C_1}{B} = -\frac{C_2}{A} = C,$$

avec C une constante.

On déduit les coefficients C_1 et C_2 comme suit : $C_1 = BC$ et $C_2 = -AC_1$. En substituant les constantes C_1, C_2 dans l'équation (14), on obtient les fonctions propres X_n correspondant aux valeurs propres ξ_n, comme suit :

$$X_n(x) = C\left[B\beta_1\sqrt{\xi_n}\cos\sqrt{\xi_n}x - A\alpha_1\sin\sqrt{\xi_n}x\right]. \qquad (20)$$

Considérons maintenant l'équation ordinaire du premier ordre (11) pour $\xi_n = \xi$. La solution s'obtient sous la forme $T_n(t) = C_n e^{-(a^2\xi_n + b)t}$. La famille des solutions satisfaisant l'équation (6) et les conditions aux limites (7)-(8) peut donc être écrite comme suit :

$$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = C_n e^{-(a^2\xi_n + b)t}X_n(x). \qquad (21)$$

D'après le principe de superposition, la somme :

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-(a^2\xi_n + b)t}X_n(x) \qquad (22)$$

est la solution de l'équation homogène (6) avec les conditions aux limites homogènes (7)-(8). Les coefficients C_n sont obtenus en utilisant la condition initiale (3). En effet, d'après la théorie de Sturm-Liouville, les fonctions propres $\{X_k(x), k \geq 1\}$ forment une famille orthogonale complète sur l'intervalle $[l_1, l_2]$ et le développement en série de la fonction $\varphi(x)$ est de la forme :

$$u(x,0)=\varphi(x)=\sum_{k=1}^{\infty}C_k X_k(x). \qquad (23)$$

En raison de la condition d'orthogonalité, les coefficients C_n s'obtiennent en multipliant la relation (23) par $X_n(x)$ et en intégrant de l_1 à l_2 sous la forme suivante :

$$C_n=\frac{1}{\|X_n\|^2}\int_{l_1}^{l_2}\varphi(x)X_n(x)dx, \qquad (25)$$

où $\|X_n\|^2=\int_{l_1}^{l_2}X_n(x)^2dx$, de telle sorte que chaque élément $X_n(x)$ de la base orthogonale soit normalisé à l'unité.

3. Equation non homogène

Considérons dans cette section la forme générale (2) de l'équation non homogène :

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,t)-a^2\frac{\partial}{\partial x^2}u(x,t)+bu(x,t)=f(x,t),$$

avec la condition (3) et les conditions aux limites homogènes (7), (8). Décomposons la fonction $u(x, t)$ en somme de deux fonctions :

$$u(x,t)=u_h(x,t)+u_p(x,t), \qquad (26)$$

où $u_h(x,t)$ satisfait l'équation homogène (6) avec la condition initiale (3) et les conditions aux limites (7)-(8). La fonction $u_p(x,t)$ satisfait à l'équation non homogène (2) avec les conditions aux limites homogènes (7)-(8) et condition initiale nulle, c'est-à-dire :

$$u_p(x,0)=0. \qquad (27)$$

La méthode pour obtenir $u_h(x,t)$ a été déjà discutée dans la section précédente. Cherchons u_p sous la forme :

$$u_p(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}X_n(x)T_n(t) \qquad (28)$$

En introduisant la formule (28) dans l'équation (2), nous obtenons :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[T_n'(t)+(a^2\xi_n+b)T_n(t)\right]X_n(x)=f(x,t). \qquad (29)$$

D'après la propriété de complétude des fonctions propres X_n, la fonction $f(x,t)$ peut être décomposée en une série de fonctions de X_n dans l'intervalle (l_1,l_2) :

$$f(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(t)X_n(x). \qquad (30)$$

La propriété d'orthogonalité des fonctions X_n nous permet de déduire les fonctions f_n sous la forme,

$$f_n(t)=\frac{1}{\|X_n\|^2}\int_{l_1}^{l_2}f(x,t)X_n(x)dx. \qquad (31)$$

En comparant la formule (29) à (30) on obtient l'équation différentielle ordinaire de premier degré,

$$T_n'(t)+(a^2\xi_n+b)T_n(t)= f_n(t)\ , \qquad (32)$$

avec la condition initiale $T_n(0)=0$ d'après la condition (27). La solution de l'équation (32) avec la condition initiale nulle est donnée par,

$$T_n(t)=\int_0^t f_n(\tau)e^{-(a^2\xi_n+b)(t-\tau)}d\tau\ . \qquad (33)$$

En posant $Y_n(t-\tau)=e^{-(a^2\xi_n+b)(t-\tau)}$, on peut réécrire T_n sous la forme,

$$T_n(t)=\int_0^t f_n(\tau)Y_n(t-\tau)d\tau \qquad (34)$$

La solution de l'équation non homogène avec les conditions aux limites nulles est sous la forme,

$$u(x,t)=u_h(x,t)+u_p(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[T_n(t)+C_ne^{-(a^2\xi_n+b)t}\right]X_n(x). \qquad (35)$$

Considérons maintenant l'équation non homogène (2) suivante,

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,t)-a^2\frac{\partial}{\partial x^2}u(x,t)+bu(x,t)= f(x,t),$$

avec la condition initiale (3) et les conditions aux limites non homogènes (4) et (5) suivantes :

$$u(x,0)=u_0(x)\ ,$$

$$\beta_1u(l_1,t)+\alpha_1u(l_1,t)=g_1(t)\ ,$$

$$\beta_2u(l_2,t)+\alpha_2u(l_2,t)=g_2(t)\ .$$

Comme les conditions aux limites sont non homogènes, la méthode de séparation de variables ne peut s'appliquer directement. De ce fait, il est nécessaire de réduire le problème à un autre avec les conditions aux limites nulles. Pour ce faire, la solution du problème est cherchée sous la forme :

$$u(x,t)=v(x,t)+w(x,t) \qquad (36)$$

où $v(x,t)$ est la nouvelle fonction inconnue solution de l'équation non homogène

$$\frac{\partial}{\partial t}v(x,t)-a^2\frac{\partial}{\partial x^2}v(x,t)+bv(x,t)= \tilde{f}(x,t), \qquad (37)$$

avec la condition initiale,

$$v(x,0)=\tilde{u}_0(x)\ , \qquad (38)$$

et les conditions aux limites nulles :

$$\beta_1v_x(l_1,t)+\alpha_1v(l_1,t)=0, \qquad (39)$$

$$\beta_1v_x(l_1,t)+\alpha_1v(l_1,t)=0, \qquad (40)$$

où $$\tilde{f}(x,t) = f(x,t) - \frac{\partial}{\partial t} w(x,t) + a^2 \frac{\partial}{\partial x^2} w(x,t) - bw(x,t),$$ et $\tilde{u}_0(x) = u_0(x) - w(x,0)$.

La fonction $w(x,t)$ est la fonction auxiliaire choisie de manière à satisfaire les conditions aux limites données, c'est-à-dire

$$\beta_1 w_x(l_1,t) + \alpha_1 w(l_1,t) = g_1(t), \tag{41}$$

$$\beta_2 w_x(l_2,t) + \alpha_2 w(l_2,t) = g_2(t). \tag{42}$$

La solution du problème (37)-(40) est déjà obtenue d'après section précédente. Pour construire $w(x, t)$ en tenant compte des conditions vérifiées par celle-ci, il est commode de la mettre sous la forme :

$$w(x,t) = P_1(x)g_1(t) + P_2(x)g_2(t), \tag{43}$$

où $P_1(x)$ et $P_2(x)$ sont des polynômes de premier et second degré. Les coefficients des polynômes sont choisis de manière à satisfaire les conditions aux limites données. Deux cas principaux peuvent être considérés, le cas où les coefficients α_1 et α_2 liés aux conditions aux limites ne sont pas simultanément nuls (c'est-à-dire que $\alpha_1 \neq 0$ ou $\alpha_2 \neq 0$), et une situation où les deux coefficients α_1 et α_2 sont nuls.

Cas 1: $\alpha_1 \neq 0$ ou $\alpha_2 \neq 0$.

P_1 et P_2 sont choisis comme polynômes du premier degré :

$$P_1(x) = \gamma_1 + \delta_1 x, \qquad P_2(x) = \gamma_2 + \delta_2 x, \tag{44}$$

et la fonction auxiliaire w prend la forme :

$$w(x,t) = (\gamma_1 + \delta_1 x)g_1(t) + (\gamma_2 + \delta_2 x)g_2(t). \tag{45}$$

En substituant celle-ci dans les conditions aux limites (41) et (42) , nous obtenons le système

$$\begin{cases} \beta_1 \left[\delta_1 g_1(t) + \delta_2 g_2(t)\right] + \alpha_1 \left[(\gamma_1 + \delta_1 l_1) g_1(t) + (\gamma_2 + \delta_2 l_1) g_2(t)\right] = g_1(t), \\ \beta_2 \left[\delta_1 g_1(t) + \delta_2 g_2(t)\right] + \alpha_2 \left[(\gamma_1 + \delta_1 l_2) g_1(t) + (\gamma_2 + \delta_2 l_2) g_2(t)\right] = g_2(t). \end{cases} \tag{46}$$

En faisant une identification membre à membre de chaque équation du système après regroupement des termes, nous obtenons le système d'équations :

$$\begin{cases} \beta_1\delta_1 + \alpha_1\gamma_1 + \alpha_1\delta_1 l_1 = 1 \\ \beta_1\delta_2 + \alpha_1\gamma_2 + \alpha_1\delta_2 l_1 = 0 \\ \beta_2\delta_1 + \alpha_2\gamma_1 + \alpha_2\delta_1 l_2 = 0 \\ \beta_2\delta_2 + \alpha_2\gamma_2 + \alpha_2\delta_2 l_2 = 1 \end{cases}$$

dont la résolution nous conduit à l'obtention des expressions de γ_1, γ_2, δ_1, et δ_2 comme suit :

$$\gamma_1 = \frac{\beta_2 + \alpha_2 l_2}{\beta_2\alpha_1 - \beta_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_2(l_2 - l_1)}, \quad \gamma_2 = \frac{\beta_1 + \alpha_2 l_1}{\beta_2\alpha_1 - \beta_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_2(l_2 - l_1)}$$

$$\delta_1 = \frac{-\alpha_2}{\beta_2\alpha_1 - \beta_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_2(l_2 - l_1)}, \ \delta_2 = \frac{\alpha_2}{\beta_2\alpha_1 - \beta_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_2(l_2 - l_1)} \quad (47)$$

De tout ce qui précède, la fonction auxiliaire w prend la forme :

$$\begin{aligned} w(x,t) &= \left(\frac{\beta_2 + \alpha_2 l_2}{\beta_2\alpha_1 - \beta_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_2(l_2 - l_1)} + \frac{-\alpha_2}{\beta_2\alpha_1 - \beta_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_2(l_2 - l_1)} x \right) g_1(t) \\ &+ \left(\frac{\beta_1 + \alpha_2 l_1}{\beta_2\alpha_1 - \beta_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_2(l_2 - l_1)} + \frac{\alpha_1}{\beta_2\alpha_1 - \beta_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_2(l_2 - l_1)} x \right) g_2(t). \end{aligned} \quad (48)$$

La solution du problème (2)-(5) s'écrit dans ce cas sous forme :

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[T_n(t) + C_n e^{-(a^2\xi_n + b)t} \right] X_n(x) + w(x,t). \quad (49)$$

<u>2 è Cas</u> : $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.$

Les conditions aux limites (41) et (42) deviennent dans ce cas :

$$w_x(l_1,t) = g_1(t) \quad (50)$$

$$w_x(l_2,t) = g_2(t)\,. \quad (51)$$

Dans ce cas pour que la forme (43) de $w(x,t)$ soit consistante, les polynômes P_1 et P_2 doivent être de degré supérieur à 1. Pour ce faire, nous prenons les polynômes du second degré pour des raisons de simplification des calculs. Soient donc

$$P_1(x) = \gamma_1 + \delta_1 x + \lambda_1 x^2, \qquad P_1(x) = \gamma_2 + \delta_2 x + \lambda_2 x^2 \quad (52)$$ et $w(x,t)$ prend la forme,

$$w(x,t) = \left(\gamma_1 + \delta_1 x + \lambda_1 x^2\right) g_1(t) + \left(\gamma_2 + \delta_2 x + \lambda_2 x^2\right) g_2(t). \quad (53)$$

En introduisant cette nouvelle forme $w(x,t)$ de dans les conditions aux limites, nous obtenons le système d'équation :

$$\begin{cases} \delta_1 + 2\lambda_1 l_1 = 1 \\ \delta_2 + 2\lambda_2 l_1 = 0 \\ \delta_1 + 2\lambda_1 l_1 = 0 \\ \delta_2 + 2\lambda_2 l_2 = 0, \end{cases}$$

dont la résolution nous donne

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2(l_2 - l_1)} \qquad \lambda_2 = \frac{1}{2(l_2 - l_1)}$$

$$\delta_1 = \frac{l_2}{l_2 - l_1} \qquad \delta_2 = -\frac{l_1}{l_2 - l_1}.$$

En prenant $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$, la fonction $w(x, t)$ prend la forme générique suivante :

$$w(x,t) = \frac{1}{2(l_2 - l_1)}\left[\left(l_2 x - x^2\right) g_1(t) + \left(-l_1 x + x^2\right) g_2(t)\right]. \tag{54}$$

La solution du problème (2)-(5) s'écrit dans ce dernier cas comme suit:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[T_n(t) + C_n e^{-(a^2\xi_n + b)t}\right] X_n(x) + \frac{1}{2(l_2 - l_1)}\left[\left(l_2 x - x^2\right) g_1(t) + \left(-l_1 x + x^2\right) g_2(t)\right]. \tag{55}$$

4. Application à l'équation de Burgers

Considérons l'équation non linéaire parabolique unidimensionnelle à coefficients constants connue sous le nom d'équation de Burgers :

$$u_t + uu_x - a^2 u_{xx} = 0, \qquad l_1 < x < l_2, \qquad 0 < t < T, \tag{56}$$

associée à la condition initiale :

$$u(x,0) = u_0(x), \tag{57}$$

et aux conditions aux limites de Dirichlet non homogènes:

$$u(l_1,t) = \alpha_1, \qquad \alpha_1 \in \mathbb{R} \tag{58}$$

$$u(l_2,t) = \alpha_2, \qquad \alpha_2 \in \mathbb{R}. \tag{59}$$

En raison de la présence d'un terme convectif et d'un terme diffusif, l'équation de Burgers modélise un grand nombre de phénomène en physique mathématique [14], [15], [16]. La fonction $u_0(x)$ est donnée ainsi que les valeurs α_1 et α_2 fixées aux deux bords. Le coefficient a^2 est le paramètre de viscosité cinématique. Lorsque ce coefficient est nul, l'équation (56) se réduit à une équation aux dérivées partielles non linéaire connue sous le nom d'équation de Burgers non visqueuse. Par la transformation de Hopf-Cole (voir [17], [18]):

$$u(x,t) = -2a^2 \frac{w_x(x,t)}{w(x,t)}, \tag{60}$$

l'équation (56) est réduite à l'équation de diffusion de chaleur suivante :

$$w_t - a^2 w_{xx} = 0. \tag{61}$$

Les conditions initial et limites (57), (58) et (59) deviennent respectivement :

$$w(x,0) = \varphi(x) = w(l_1,0)\exp\left(-\frac{1}{2a^2}\int_{l_1}^{x} u_0(x)dx\right), \tag{62}$$

$$2a^2 w_x(l_1,t) + \alpha_1 w(l_1,t) = 0, \tag{63}$$

$$2a^2 w_x(l_2,t) + \alpha_2 w(l_2,t) = 0. \tag{64}$$

L’équation (61) avec les conditions (62)-(64) est un problème de diffusion avec conditions aux limites mixtes et homogènes. Sans perte de généralité, on peut considérer dans l’équation (62), $w(l_1,0)>0$.

Conformément aux sections précédentes, la famille de solutions satisfaisant à l'équation (61) et les conditions aux limites (63)-(64) peut s’écrire, comme suit :

$$w_n(x,t)=X_n(x)T_n(t)=C_n e^{-a^2\xi_n t}X_n(x)\,. \qquad (65)$$

D’après le principe de superposition, la solution générale est :

$$w(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}w_n(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n e^{-(a^2\xi_n t+b)}X_n(x). \qquad (66)$$

Les coefficients C_n sont obtenus en utilisant la condition initiale (62) :

$$C_n=\frac{1}{\|X_n\|^2}\int_{l_1}^{l_2}\varphi(x)X_n(x)dx \qquad (67)$$

où $\|X_n\|^2=\int_{l_1}^{l_2}X_n(x)^2dx$ de telle sorte que chaque élément $X_n(x)$ de la base orthogonale soit normalisé à l'unité.

Connaissant maintenant la solution du problème (61)-(64) exprimée par la formule (66), la solution du problème l’équation de Burgers sur intervalle générique $[l_1,l_2]$, se déduit à partir de la formule de transformation de Hopf-Cole (voir équation (60)) comme suit :

$$u(x,t)=-2a^2\frac{\sum_{n=1}^{\infty}C_n e^{-(a^2\xi_n+b)}X_n'(x)}{\sum_{n=1}^{\infty}C_n e^{-(a^2\xi_n+b)t}X_n(x)} \qquad (68)$$

avec $X_n(x)=2a^2B\sqrt{\xi_n}\cos\sqrt{\xi_n}x-A\alpha_1\sin\sqrt{\xi_n}x,$ $X_n'(x)=-2a^2\xi_nB\sin\sqrt{\xi_n}x-A\sqrt{\xi_n}\alpha_1\cos\sqrt{\xi_n}x$ où A, B et ξ_n sont déterminés comme à la section 2.

En guise d’exemple pratique considérons le problème de l’équation (56) avec la condition initiale suivante :

$$u(x,0)=\sin(\pi x), \qquad x\in(0,1), \qquad (69)$$

et les conditions aux limites :

$$u(0,t)=u(1,t)=0. \qquad (70)$$

La solution exacte de ce problème, d’après la méthode décrite précédemment, est donnée dans [18] :

$$u(x,t)=2\pi a^2\frac{\sum_{n=1}^{\infty}C_n\exp\left(-n^2\pi^2a^2t\right)n\sin(n\pi x)}{C_0+\sum_{n=1}^{\infty}C_n\exp\left(-n^2\pi^2a^2t\right)\cos(n\pi x)}. \qquad (71)$$

avec $C_0=\int_0^1\exp\left(-\frac{1-\cos(\pi x)}{2\pi a^2}\right)dx,$ et $C_n=\int_0^1\exp\left(-\frac{1-\cos(\pi x)}{2\pi a^2}\right)\cos(n\pi x)dx,\ n=1,2,3,\ldots$

La figure 1 montre deux types de courbes. La courbe en trait plein nommée solution théorique est la courbe de la solution exacte (71) dont les séries au numérateur et au dénominateur sont tronquées aux cinq premiers termes. L'augmentation du nombre des termes des séries tronquées donnent des courbes identiques. La courbe en pointillé représente la solution obtenue par les différences finies à partir de la procédure 'pdepe()' implémentée dans Matlab. La variable de l'espace est subdivisée en pas de $\Delta x = 0.01$, et celle du temps en pas de $\Delta t = 0.001$.

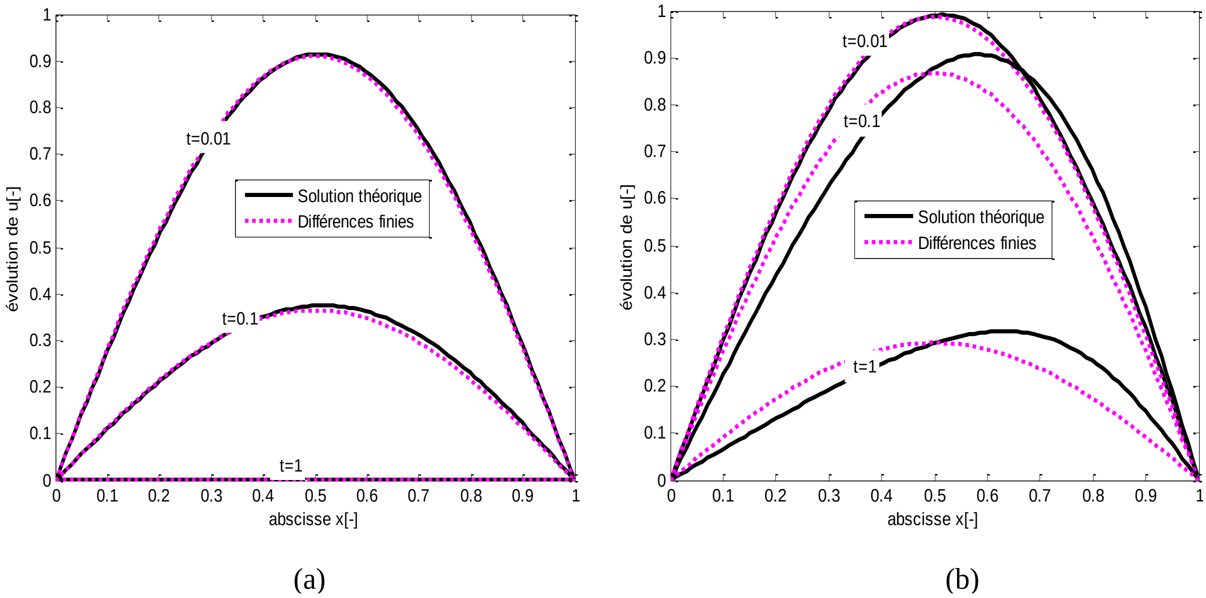

Figure 1. *Solutions u(x, t) à différents temps pour l'équation de Burgers: (a)* $a^2 = 1$, *(b)* $a^2 = 0.1$

Pour différentes valeurs du temps t, les deux courbes montrent une bonne correspondance lorsque $a = 1$, comme indiqué par la figure 1 (a). Mais lorsque les valeurs du paramètre de viscosité a^2 deviennent plus petites, un décalage est observé comme le montre la figure 1 (b), prouvant ainsi les limites de la méthode numérique des différences finies pour aborder ce genre de problème.

5. Conclusion

Ce travail a permis de généraliser la solution en série des problèmes aux valeurs limites pour l'équation parabolique à coefficients constants à tout intervalle borné de l'axe des réels. Le problème est résolu dans sa forme la plus générale avec les conditions aux limites données d'une manière unifiée. La solution en série qui en résulte peut intervenir dans un certain nombre d'applications en ingénierie, en particulier dans la résolution du problème de Stephan unidimensionnelle ayant les deux bords mobiles. L'application de la méthode sur l'équation de Burgers a permis de généraliser la solution exacte de cette équation à tout intervalle borné de l'axe réel. Cette solution peut donc être considérée comme une adaptation à l'étude numérique du problème de Stefan ou de Stefan-Burgers. La solution en série peut aussi être élargie aux intervalles non bornés de l'axe réel.

Références

[1] Henner V., Belozerova T. & Nepomnyashchy A. – Partial Differential Equations: Analytical Methods and applications, *CRC Press; Taylor and Francis Group Boca Rator*, London New York, 2019.

[2] Hamdache, K. & Labadie, M. – On a reaction-diffusion model for calcium dynamics in dendritic spines, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, (2009) **10**, **4**, 2478-2492.

[3] Joshi, H., & Jha, B. K. – On a reaction–diffusion model for calcium dynamics in neurons with Mittag–Leffler memory, *The European Physical Journal Plus*, (2021) ***136***, **6**, 623.

[4] Anani, K. – An efficient approximate analytical model for droplets transient heating and evaporation, *Int. J Numer. Methods Appl.*, (2021) **20**, **2**, 157-172.

[5] Anani, K. – Series solutions for the spherically symmetric droplet transient heating problem, *AIP Conference Proceedings*, (2022) **2668**, **1**, 050001-1–050001-8.

[6] Elliot Carr J. & Nathan March G. – Semi-analytical solution of multilayer diffusion problems with time-varying boundary conditions and general interface conditions, *Applied Mathematics and Computation*, (2018) **333**, 286-303.

[7] Bougoffa, L., Rach, R., Wazwaz, A. M., & Duan, J. S. – On the Adomian decomposition method for solving the Stefan problem, *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*, (2015) **25**, **4**, 912–928.

[8] Momani, S. – An algorithm for solving the fractional convection diffusion equation with nonlinear source term, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul*., (2007) **12**, **7**, 1283–1290.

[9] Ghasemia, M. and Kajani, M.T. – Applications of He's homotopy perturbation method to solve a diffusion convection problem, *Math. Sci*., (2010) **4**, **2**, 171–186.

[10] Ishag K. A., Abdallah M. A., & Ahmed A. M. – Homotopy Perturbation Method for Solving Nonlinear Fractional Reaction Diffusion Systems, *Applied and Computational Mathematics*, (2022) **13**, **2**, 48-55.

[11] Liu, Y. & Zhao, X. – He's variational iteration method for solving Convection diffusion equations, *Adv. Intell. Comput. Theories Appl.*, (2010) **6215**, 246–251.

[12] Memon, M., Amur, K. B., & Shaikh, W. A. – Combined variational iteration method with chebyshev wavelet for the solution of convection-diffusion-reaction problem, *Mehran University Research Journal Of Engineering & Technology*, (2023) **42**, **2**, 93-107.

[13] Miller, W. – Symmetry and Separation of Variables *Addison-Wesley*, Massachusetts, 1977.

[14] Bonkile, M. P., Awasthi, A., Lakshmi, C., Mukundan, V., & Aswin, V. S. – Asystematic literature review of Burgers' equation with recent advances. *Pramana*, (2018) ***90***, 1-21.

[15] Kumar, N. K. – A Review on Burgers' Equations and It's Applications. *Journal of Institute of Science and Technology*, (2023) ***28***,**2**, 49-52.

[16] Dhawan, S., Kapoor, S., Kumar, S., & Rawat, S. – Contemporary review of techniques for the solution of nonlinear Burgers equation. *Journal of Computational Science*, (2012) ***3***,**5**, 405-419.

[17] Hopf, E - The partial differential equation $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$, *Commun. Pure Appl. Math.*, (1950) **3**, 201–230.

[18] Cole J.D. - On a quasilinear parabolic equations occurring in aerodynamics, *Quart. Appl. Math.* (1951) **9**, 225–236.