

La méthode de Boltzmann sur réseaux pour les écoulements côtiers : Application à la lagune de Oualidia

The Lattice Boltzmann Method (LBM) for coastal flows: Application to Oualidia lagoon

Ali Haddach¹, Hassan Smaoui², Bouchaib Radi¹

¹ Hassan First University of Settat, FST, LIMII, BP : 577, Route de Casa, Settat, a.haddach@uhp.ac.ma,

² Cerema/DTecREM & Laboratoire Roberval, Université de Technologie de Compiègne, Compiègne, France

RÉSUMÉ. La méthode de Boltzmann sur réseau (MBR) a été utilisée de manière spectaculaire ces dernières années dans le domaine de la dynamique des fluides numérique. Cette méthode a été rarement appliquée aux écoulements hydrauliques. L'objectif de ce travail est de présenter le modèle que nous avons développé pour résoudre les équations des eaux peu profondes (EEPP) par la MBR. Dans un premier temps le modèle a été vérifié sur des cas académiques en hydraulique. Dans un second temps, le modèle a été appliqué au cas schématique de la propagation de l'onde de marée dans la lagune de Oualidia (côte Ouest du Maroc). Le modèle ainsi développé a produit avec une bonne précision les caractéristiques de ces trois écoulements étudiés et en particulier la propagation de l'onde de marée.

ABSTRACT. The Lattice Boltzmann method (LBM) has been used spectacularly in recent years in the computational fluid dynamics field. This method has rarely been applied to hydraulic flows. The objective of this work is to present the model that we have developed to solve the shallow water equations (SWE) by the LBM. Initially, the model was verified on academic cases in hydraulics. In a second step, the model was applied to the schematic case of the propagation of the tidal wave in the lagoon of Oualidia (west coast of Morocco). The model thus developed produced with good precision the characteristics of these three studied flows and in particular the propagation of the tidal wave.

MOTS-CLÉS. Méthode de Boltzmann sur réseau, Equation de Saint-Venant, lagune de Oualidia, écoulements côtiers.

KEYWORDS. Lattice Boltzmann Method, Shallow water equation, Oualidia lagoon, coastal flows.

1. Introduction

L'environnement côtier, zone de transition entre l'océan et le continent, fait l'objet d'un nouvel intérêt de la communauté scientifique depuis plusieurs années pour deux raisons, l'une scientifique et l'autre liée aux besoins de la société. D'un point de vue scientifique, l'intérêt réside dans le rôle d'interface assuré par la zone côtière entre le continent et l'océan profond. En effet, généralement les pentes continentales, qui sont le siège de la dissipation et des échanges avec les plateaux. Ces processus sont mal représentés dans les modèles de circulation générale car ils nécessitent des résolutions spatiales suffisamment élevées, pour une prise en compte correcte de la topographie et une bonne connaissance de la marée. Par ailleurs, les plateaux continentaux jouent un rôle particulier car ils constituent le débouché des continents à travers le drainage des bassins versants ainsi que les rejets urbains, qui aboutissent dans les rivières (qui reste confiner dans les zones côtières). Ce mécanisme de drainage fait de ces endroits des lieux riches en faune et en flore.

L'intervention humaine sur le littoral génère souvent des conséquences catastrophiques (contamination chimique, industries, tourisme, activités de pêche, trafic de pétroliers, etc.). Le développement des infrastructures, l'expansion de l'agriculture intensive, l'urbanisation et l'aménagement du littoral augmentent les flux de sédiments et d'eaux usées dans l'océan. Pour limiter l'impact de ces conséquences, il est nécessaire de réaliser des études techniques et scientifiques préalables. Ces études permettent de proposer des aménagements en anticipant les conséquences écologiques qui pourraient affecter la zone côtière à long ou à court terme. Ainsi, le

succès de ces études dépend de la bonne compréhension de l'hydrodynamique et d'une bonne connaissance des processus à l'origine du transit sédimentaire (charge de fond, charge en suspension, dépôt, érosion, etc.). Dans cette perspective, la modélisation apparaît comme un outil essentiel et efficace pour étudier et comprendre la description des processus impliqués dans la dynamique côtière, car elle écarte les contraintes propres aux mesures *in situ* et permet de tester des scénarios en termes d'impact des activités anthropiques ou de prévision d'évolution.

Dans ce contexte, nous proposons dans ce papier la modélisation numérique de l'écoulement des zones côtières en utilisant la méthode de Boltzmann sur réseau (méthode relativement nouvelle basée sur la théorie de la cinétique des gaz). L'objectif de ce papier est d'évaluer les performances de cette méthode sur le cas schématisé de la lagune de Oualidia. Nous examinons également la capacité de la MBR à reproduire correctement la propagation de l'onde de marée semi-diurne lunaire M_2 dans un site à hydrodynamique complexe telle que la lagune de Oualidia qui présente un intérêt écologique et économique majeur dans cette zone côtière marocaine de l'océan Atlantique.

2. Position du problème

Dans la plupart des cas, les écoulements côtiers peuvent être décrits de manière efficace et précise avec les équations de Saint-Venant (EEPP). Ces équations s'obtiennent en considérant l'approximation des eaux peu profondes (AEP) qui suppose que la profondeur de l'écoulement h est très faible comparée aux échelles caractéristiques des dimensions horizontales L (c'est-à-dire quand $h/L \ll 1$). L'application de l'AEP combinée d'une analyse comparative aux dimensions a montré que l'accélération verticale est négligeable devant le gradient de pression verticale et l'accélération de la pesanteur. Une simple intégration de ce gradient de pression sur la dimension verticale montre alors que la pression est hydrostatique. Ces approximations ont permis à Saint-Venant d'établir des équations décrivant l'écoulement moyen en intégrant les équations tridimensionnelles du Navier-Stokes sur la verticale (voir figure [1]).

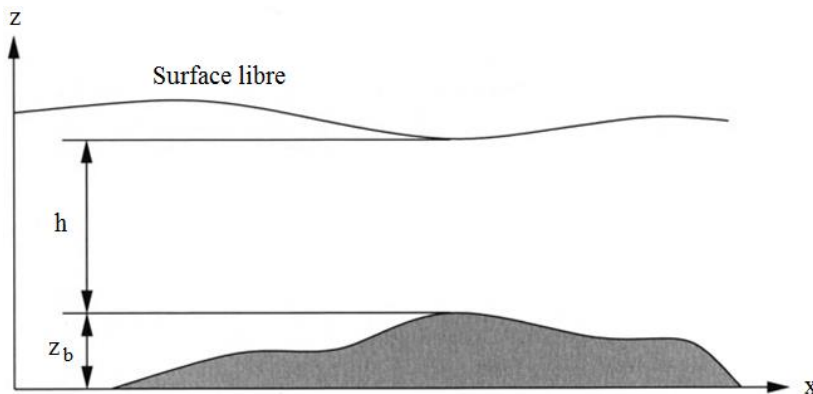


Figure 1. Coupe verticale d'un écoulement en eau peu profonde

Ce sont alors des équations aux dérivées partielles bidimensionnelle décrivant la conservation de la masse (équation de continuité) et de la quantité du mouvement de l'écoulement moyen. Ces équations sont données par :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(h\bar{u})}{\partial x} + \frac{\partial(h\bar{v})}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial h\bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial h\bar{u}\bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial h\bar{u}\bar{v}}{\partial y} = -g \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h^2}{2} \right) + \vartheta \nabla^2(h\bar{u}) + F_x \quad (2)$$

$$\frac{\partial h\bar{v}}{\partial t} + \frac{\partial h\bar{u}\bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial h\bar{v}\bar{v}}{\partial y} = -g \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{h^2}{2} \right) + \vartheta \nabla^2(h\bar{v}) + F_y \quad (3)$$

où h est la hauteur d'eau, g est l'accélération de pesanteur, ϑ est la viscosité cinématique du fluide, $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ est l'opérateur Laplacien, sont les composantes des forces extérieures, \bar{u} et \bar{v} sont les composantes de la vitesse moyenne et qui sont données par :

$$\bar{u}(x, y) = \frac{1}{h} \int_{z_b}^{h+z_b} u(x, y, z) dz \quad \text{et} \quad \bar{v}(x, y) = \frac{1}{h} \int_{z_b}^{h+z_b} v(x, y, z) dz$$

où z_b est la topographie du fond (figure 1.)

Les composantes des forces extérieures F_x et F_y peuvent inclure les effets de la topographie, la force de Coriolis, les cisaillements dus au frottement au fond τ_b et à la surface par l'action du vent τ_w . avec le fond et la force du vent.

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} -gh \frac{\partial z_b}{\partial x} + f_c h \bar{v} - \frac{\tau_{bx}}{\rho} + \frac{\tau_{wx}}{\rho} \\ -gh \frac{\partial z_b}{\partial y} - f_c h \bar{u} - \frac{\tau_{by}}{\rho} + \frac{\tau_{wy}}{\rho} \end{bmatrix} \quad (4)$$

où f_c est la fréquence de la force de Coriolis.

Il convient de noter que l'intégration sur la verticale a introduit deux termes supplémentaires qui traduisent les effets visqueux au fond (τ_b) et à la surface (τ_w). Les effets au fond s'expriment en fonction des vitesses moyennes $\mathbf{u} = (\bar{u}, \bar{v})$. De même les effets à la surface sont exprimés par une formule en fonction de la vitesse du vent $\mathbf{u}_{vent} = (u_{vent}, v_{vent})$ proche de l'interface eau/atmosphère. Ces expressions sont données par :

$$\tau_b = (\tau_{bx}, \tau_{by}) = \rho C_b \|\mathbf{u}\| \mathbf{u} \quad \text{et} \quad \tau_w = (\tau_{wx}, \tau_{wy}) = \rho_{air} C_w \|\mathbf{u}_{vent}\| \mathbf{u}_{vent}$$

où C_b et C_w sont des constantes empiriques.

3. Méthode de Lattice-Boltzmann (LBM)

La méthode de Boltzmann sur réseau est une méthode numérique relativement nouvelle par rapport aux approches classiques utilisées en simulation numérique des écoulements. Elle a été présentée pour la première fois dans les années 90, pour traiter les gaz sur réseau et des automates cellulaires. Cette méthode se base sur la description mésoscopique du mouvement d'un fluide. Elle se situe alors entre la description à l'échelle microscopique et celle à l'échelle macroscopique.

A l'inverse des méthodes classiques qui considèrent une description macroscopique du volume représentatif élémentaire (VRE), la MBR s'appuie sur la physique statistique qui consiste en la résolution numérique de l'équation de Boltzmann (EB). Cette équation aux dérivées partielles (EDP) modélisant la transport de la distribution des vitesses f sous les effets d'une force extérieure \mathbf{F} . On parle alors de représentation mésoscopique du mouvement de l'écoulement. A l'aide d'une analyse multi-échelles, on peut remonter alors aux variables macroscopiques (h, u, v) de l'écoulement par une simple intégration numérique des différents moments de différents ordres [ZHO 04].

3.1. Equation de Boltzmann

Comme mentionné plus haut, l'équation de Boltzmann [BOL 78] est une EDP décrivant l'évolution spatio-temporelle de la distribution f d'une particule de masse m soumise à une force \mathbf{F} évoluant dans un réseau de vitesse \mathbf{c} . Cette est donnée par :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{c}f + \frac{\mathbf{F}}{m} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{c}} = \Omega_{col} \quad (5)$$

En effet, cette équation traduit deux phénomènes : le premier membre est une advection de particules et le deuxième membre représente l'effet de la collision entre les particules. Si l'on tient pas compte de la collision, les particules sont alors simplement advectées sous l'action de la force \mathbf{F} . S'il y'a collision entre les particules, l'évolution du système dépendra alors de la forme de l'opérateur de collision Ω_{col} .

Ce n'est qu'en 1954 que Bhatnagar, Gross et Krook [BGK 54] ont proposé un modèle simple de collision (connu sous le nom BGK), basé sur l'idée que la collision des particules se réalise autour d'une distribution d'équilibre et durant un temps τ appelé temps de relaxation. Avec la collision par BGK, il a été démontré que l'équation de Boltzmann permettait de décrire les écoulements de la mécanique des fluides régis par les équations de Navier-Stokes. L'opérateur de collision BGK s'exprime alors par :

$$\Omega_{col} = -\frac{1}{\tau}(f - f^{eq}) \quad (6)$$

Où τ est le temps de relaxation et f^{eq} la fonction de distribution de Maxwell-Boltzmann

$$f^{eq}(\mathbf{x}, \mathbf{c}, \mathbf{u}, t) = \frac{\rho}{(2\pi\theta)^{3/2}} \exp\left(-\frac{(\mathbf{c} - \mathbf{u})^2}{2\theta}\right) \quad (7)$$

Avec ρ la masse volumique du fluide, $\theta = \frac{k_B T}{m}$ où k_B est la constante de Boltzmann et T la température. L'équation de Boltzmann devient donc :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{c} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\mathbf{F}}{m} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{c}} = -\frac{1}{\tau}(f - f^{eq}) \quad (8)$$

Depuis cette date, plusieurs applications de la MBR ont été publiées dans la littérature. On cite par exemple: l'aérodynamique, les écoulements multi-phasiques, la propagation des ondes, l'acoustique, les écoulements souterrains, etc.

3.2. Modèle D2Q9

L'équation (8) est une EDP dont la variable f dépend de la position \mathbf{x} , du temps t et de la vitesse du réseau \mathbf{c} . La discrétisation de cette équation par rapport à \mathbf{x} et t se fait de manière classique. La nouveauté de la MBR est la discrétisation suivant la vitesse \mathbf{c} . Elle s'effectue par le choix d'un réseau qui représente les directions possibles que peut prendre une particule placée au centre après une collision avec d'autres particules. La densité du réseau dépend alors du degré de précision choisie. Par exemple, pour un réseau en 2 dimensions (2D), on utilise le réseau D2Q9 (voir figure [2]) : "D2" pour 2 dimensions et "Q9" pour 9 directions possibles vers les points voisins en considérant la direction nulle. Pour les études hydrodynamiques, le réseau D2Q9 est largement suffisant pour une précision de second ordre.

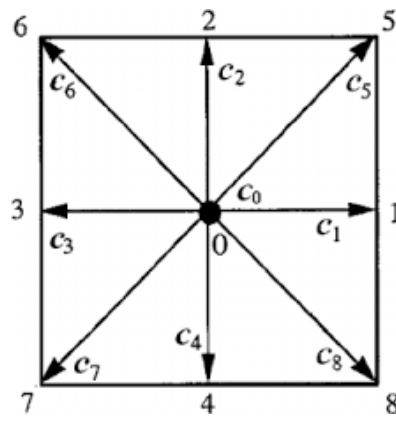


Figure 2. Réseau D2Q9

Pour chaque direction $i \in \{0,1,\dots,8\}$ est associée une vitesse (Figure 2) dont l'expression est donnée par :

$$\mathbf{c}_\alpha = \begin{cases} (0,0) & \alpha = 0 \\ c \left(\cos \left[(\alpha - 1) \frac{\pi}{2} \right], \sin \left[(\alpha - 1) \frac{\pi}{2} \right] \right) & \alpha = 1,2,3,4 \\ \sqrt{2}c \left(\cos \left[(2\alpha - 9) \frac{\pi}{4} \right], \sin \left[(2\alpha - 9) \frac{\pi}{4} \right] \right) & \alpha = 5,6,7,8 \end{cases} \quad (9)$$

Où $c = \Delta x / \Delta t$ est la vitesse du réseau discrétisée, avec Δx le pas d'espace et Δt le pas de temps.

Ainsi, si l'on fixe $\mathbf{x}, \mathbf{c}, t$ et en faisant un développement limité en \mathbf{u} de la fonction d'équilibre au second ordre au voisinage de \mathbf{c} , on trouve f_α^{eq} pour les équations de Saint-Venant [ZHO 04] suivant les neuf directions du réseau D2Q9 :

$$f_\alpha^{eq} = h - \frac{5gh^2}{6c^2} - \frac{2h}{3c^2} \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i \quad \text{pour } \alpha = 0 \quad (10.a)$$

$$f_\alpha^{eq} = \frac{gh^2}{6c^2} + \frac{h}{3c^2} \mathbf{c}_{ai} \mathbf{u}_i + \frac{h}{2c^4} \mathbf{c}_{ai} \mathbf{c}_{aj} \mathbf{u}_i \mathbf{u}_j - \frac{h}{6c^2} \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i \quad \text{pour } \alpha = 1,2,3,4 \quad (10.b)$$

$$f_\alpha^{eq} = \frac{gh^2}{24c^2} + \frac{h}{12c^2} \mathbf{c}_{ai} \mathbf{u}_i + \frac{h}{8c^4} \mathbf{c}_{ai} \mathbf{c}_{aj} \mathbf{u}_i \mathbf{u}_j - \frac{h}{24c^2} \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i \quad \text{pour } \alpha = 5,6,7,8 \quad (10.c)$$

Finalement, l'équation de Boltzmann discrétisée devient :

$$f_\alpha(\mathbf{x}_i + \mathbf{c}_{ai} \Delta t, t + \Delta t) = f_\alpha(\mathbf{x}_i, t) - \frac{1}{\tau} (f_\alpha - f_\alpha^{eq}) + \frac{\Delta t}{6c^2} \mathbf{c}_{ai} \mathbf{F}_i \quad (11)$$

Avec \mathbf{c}_{ai} est la i -ème composante du vecteur vitesse \mathbf{c}_α de la particule donnée par l'équation (9).

3.3. Conditions aux limites

Les conditions aux limites jouent un rôle important dans la MBR car elles peuvent influencer la précision et la stabilité de la méthode. Lorsque l'écoulement se réalise sans glissement au niveau des parois, on utilise la règle du rebond (bounce-back). Le schéma de rebond est l'approche la plus simple et largement adaptée pour les conditions aux limites sans glissement. Pour les frontières ouvertes il est nécessaire de transformer les conditions sur les variables de l'écoulement en des conditions sur les fonctions de distributions. Ceci constitue la difficulté inhérente à la MBR pour traiter les conditions aux limites.

4. Tests numériques académiques

Dans cette section, nous présentons, la vérification de notre code sur l'écoulement dans un canal coudé à 180° , puis l'exemple de rupture de barrage. Ce sont des exemples classiques en étude hydrauliques.

4.1. Ecoulement dans un coude de 180°

Le premier exemple est un écoulement dans un canal coudé. Il est l'un des écoulements de fluide les plus connues et complexes rencontrés dans l'environnement, non seulement parce que l'écoulement est turbulent et fortement tridimensionnel, mais aussi parce que sa topographie et sa bathymétrie irrégulières sont, en général, soumises à des changements constants en raison des processus d'érosion, de transport et de dépôt de sédiments (formation de méandres).

Dans ce test [BUD 14], on considère un canal curviligne de largeur $l = 0.82 \text{ m}$ et de longueur $L = 8.2 \text{ m}$. Le pas d'espace Δx a été fixé à 0.02 m et le pas de temps Δt est pris égal à 0.001 s . De même le temps de relaxation $\tau = 0.5045 \text{ s}$. A l'entrée (branche supérieure) du canal, nous avons imposé un débit par unité de largeur $Q = 0.0114 \text{ m}^2/\text{s}$. A la sortie du canal (branche inférieure), nous avons maintenu une hauteur d'eau constante ($h = 0.005 \text{ m}$).

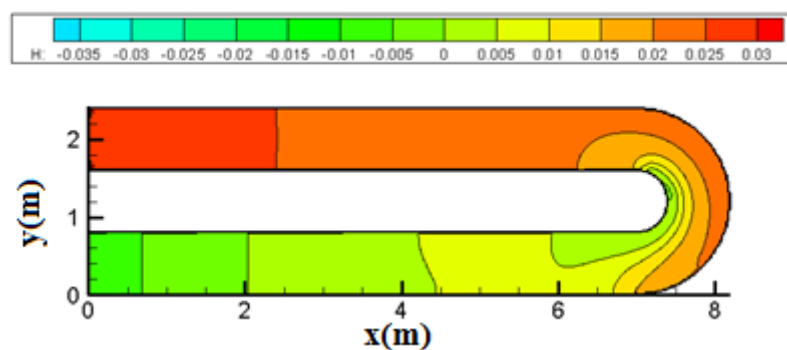


Figure 3. Hauteur d'eau dans le coude 180°

Cet écoulement est connu par 2 caractéristiques majeures : la formation d'une pente d'hauteur d'eau au virage et une formation de zone de recirculation après le virage. En effet, l'analyse de la figure 3 montre une dépression ($h = -0.01 \text{ m}$) au niveau du virage intérieur et une surpression ($h = 0.025 \text{ m}$) au niveau du virage extérieur. Ce constat est en parfait accord avec la première caractéristique citée ci-dessus. Par ailleurs la figure 4 (et son zoom) montrent également la formation d'une zone de recirculation immédiatement après la sortie du fluide du virage intérieur. Cette observation montre que le modèle ainsi développé est capable de produire la deuxième caractéristique mentionnée ci-dessus. L'examen de la figure 4 est particulièrement la partie inférieure montre un décalage dans les lignes de courant. Ceci indique le développement d'un profil parabolique de la composante u de la vitesse (résultat connu).

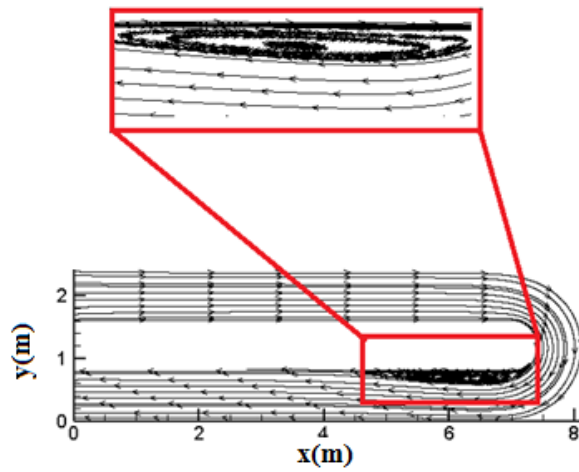


Figure 4. Lignes de courants et de vitesses

4.2. Ecoulement de rupture de barrage

Le deuxième cas classique en hydraulique concerne la rupture du barrage dans un bassin rectangulaire. Le réservoir fermé est d'une superficie de $200 \times 200 \text{ m}^2$, rempli initialement à gauche d'une hauteur d'eau de 10 m et à droite de 5 m . La rupture du barrage est simulée par une rupture brusque d'une partie de la paroi, et à l'instant de la rupture, le fluide circule de l'autre côté par la faille large de 75 m (Figure 5).

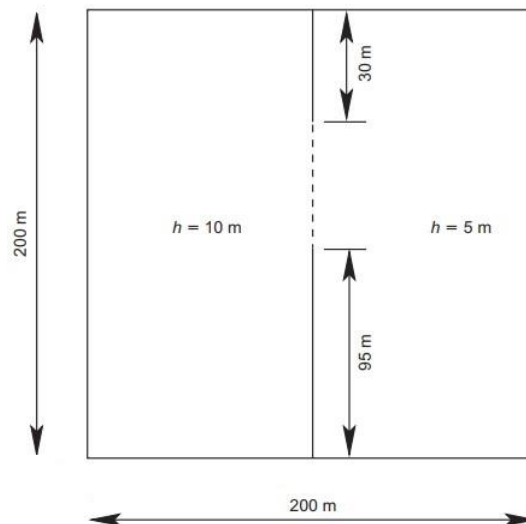


Figure 5. Schéma d'une rupture du barrage (Zhou & al., 2010)

Pour la simulation numérique, le domaine est couvert par 200×200 mailles de pas $\Delta x = \Delta y = 1 \text{ m}$. Le pas temporel et le temps de relaxation a été fixés respectivement à $\Delta t = 0.001 \text{ s}$ et $\tau = 0.55 \text{ s}$. La figure 6 superpose la hauteur d'eau, le champ des vitesses et les lignes de courant à l'instant $t = 10 \text{ s}$. L'analyse de cette figure montre que la direction de l'écoulement se fait dans le bon sens (remplissage de gauche à droite). De même nous observons la formation de deux zones tourbillonnaires. Ces zones se situent dans les sillages des singularités (les bords de l'ouverture du barrage). Les figures 7 montrent que les sous-bassin de droite se remplit de proche en proche jusqu'à atteindre la hauteur d'eau d'équilibre (état stationnaire de l'écoulement $h = 7.5 \text{ m}$). Ces résultats numériques obtenus par notre modèle montrent encore une fois, que notre modèle a bien reproduit la dynamique de la rupture d'un barrage jusqu'à l'état stationnaire de l'écoulement. Ces résultats sont également en parfait accord avec ceux obtenus dans la littérature pour ce cas classique en hydraulique [ZHO 10].

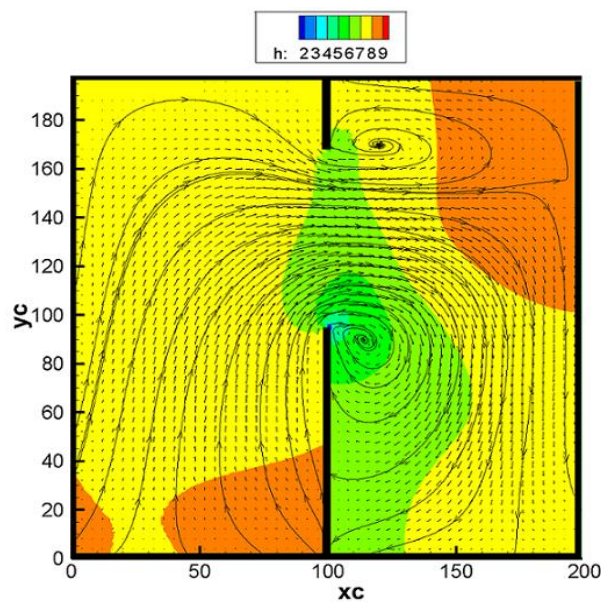


Figure 6. Les lignes de courants (rupture de barrage)

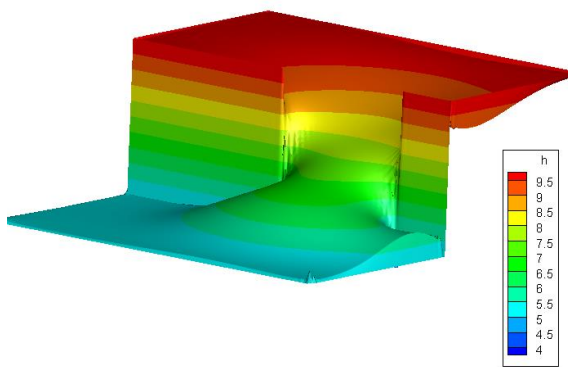


Figure 7a. L'écoulement à l'instant $t = 7.2s$

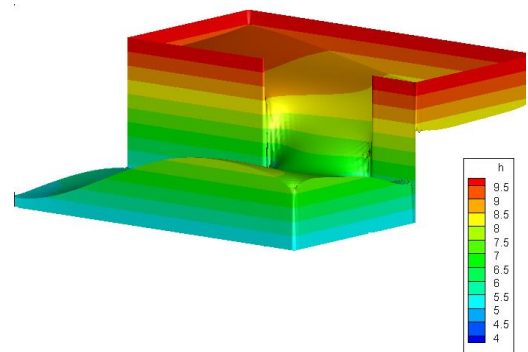


Figure 7b. L'écoulement à l'instant $t = 15s$

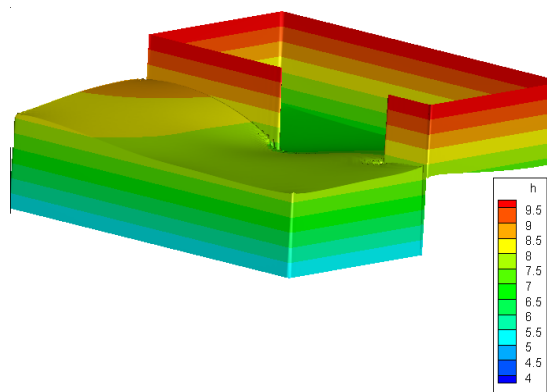


Figure 7c. L'écoulement à l'instant $t = 35s$

5. Application à la lagune de Oualidia

Le Maroc est bordé par environ 3500 km de littoral, qui s'étend sur la côte atlantique et la mer Méditerranée. Ces zones d'écosystèmes fragiles sont le siège de pressions anthropiques (tourisme, pêche, infrastructures, etc.) qui doivent être contrôlées pour une meilleure protection. Par ailleurs, les prévisions du GEIC (Groupe d'Experts Intergouvernemental sur l'évolution du Climat) sur les impacts du changement climatique ne sont pas rassurantes à moyen terme. Les côtes marocaines comptent plusieurs lagunes, qui sont une source de vie et de ressources pour des millions de

Marocains qui vivent directement des produits de ces lieux fragiles. Parmi ces lagunes, on compte celle de Oualidia qui est située sur la côte atlantique.

La lagune de Oualidia située sur la façade atlantique entre El Jadida et Safi, est l'un des sites littoraux au Maroc où se développent plusieurs activités à caractère socio-économique dont l'ostréiculture qui s'est toujours pratiquée de manière artisanale depuis les années 50. Elle s'étend parallèlement sur une zone de 8 km (avec la fosse) de long et 0.4 à 0.5 km de large et sa superficie totale est estimée à 3 km². La morphologie de la lagune de Oualidia est constituée d'un chenal principal sinueux (5.4 km de long sur près 0.4 km de large) et de plusieurs chenaux secondaires (Figure 8). Par ailleurs, cette lagune est alimentée par 2 passes d'entrée de dimensions inégales à travers le cordon littoral : passe principale permanente et une passe secondaire active en périodes de marées de vives eaux. En fait, ces deux passes permettent la propagation de l'onde de la marée dans toute la lagune.

Compte tenu de son intérêt socio-économique, la lagune de Oualidia a fait l'objet de plusieurs travaux de recherche afin de mieux comprendre le fonctionnement de son écosystème. Ces études visent également à capitaliser les connaissances sur ce site pour assurer une meilleure gestion des ressources aquacoles.

L'écoulement dans la lagune est généré principalement par la marée provenant de l'océan Atlantique. La lagune de Oualidia est une zone d'échange et de mélange intense et complexe. Cette complexité rend difficile une étude numérique complète du régime hydro-sédimentaire de la lagune sans l'aide d'une étude expérimentale du site. En ce qui nous concerne, nous essayons d'appliquer le code que nous avons implémenté pour résoudre les équations de Saint-Venant par la MBR.



Figure 8. Situation géographique de lagune de Oualidia et localisation de la zone d'étude

Pour tester notre code, nous avons considéré le cas schématisé représentant le côté ouest de la lagune de Oualidia (zone limitée par le carré, Fig.8). Il s'agit d'une zone rectangulaire avec deux ouvertures sur la limite Nord (schématisant l'océan Atlantique) et une ouverture sur la limite Est, mais située au Sud de la lagune. La bathymétrie de la zone a été fixée à 4 m, ce qui correspond à la hauteur d'eau moyenne dans la lagune. Aux deux frontières ouvertes au Nord, le modèle a été forcé par une onde de période 600 s et d'amplitude 0.5 m. Ne disposant pas de donnée à la frontière Est, nous avons imposé la condition d'un flux sortant. Pour ce cas test, nous avons fixé le pas spatial $\Delta x = \Delta y = 10 \text{ m}$, le pas temporel $\Delta t = 0.75 \text{ s}$ et le temps de relaxation assurant la stabilité numérique $\tau = 0.628 \text{ s}$. La figure 9 superpose les hauteurs d'eau et le champ des vitesses durant le flot (figure 9 de gauche) et le jusant (figure 9 de droite) au niveau de la passe principale. Par exemple, sur la figure du flot, On remarque que la hauteur est maximale au niveau de la passe et minimale au voisinage de la sortie. Si on calcule la distance séparant ces deux extremum qui n'est

autre que la demi-longueur d'onde on trouve $\lambda/2 \simeq 1825 \text{ m}$. D'autre part connaissant la célérité de l'onde et sa période, nous avons estimé la longueur d'onde $\lambda \simeq 3700 \text{ m}$. On en déduit que notre modèle propage correctement l'onde dans le domaine. On remarque également que le modèle propage l'onde dans le sens de rétrograde. Ce constat est conforme aux différents résultats publiés sur l'hydrodynamique de la lagune.

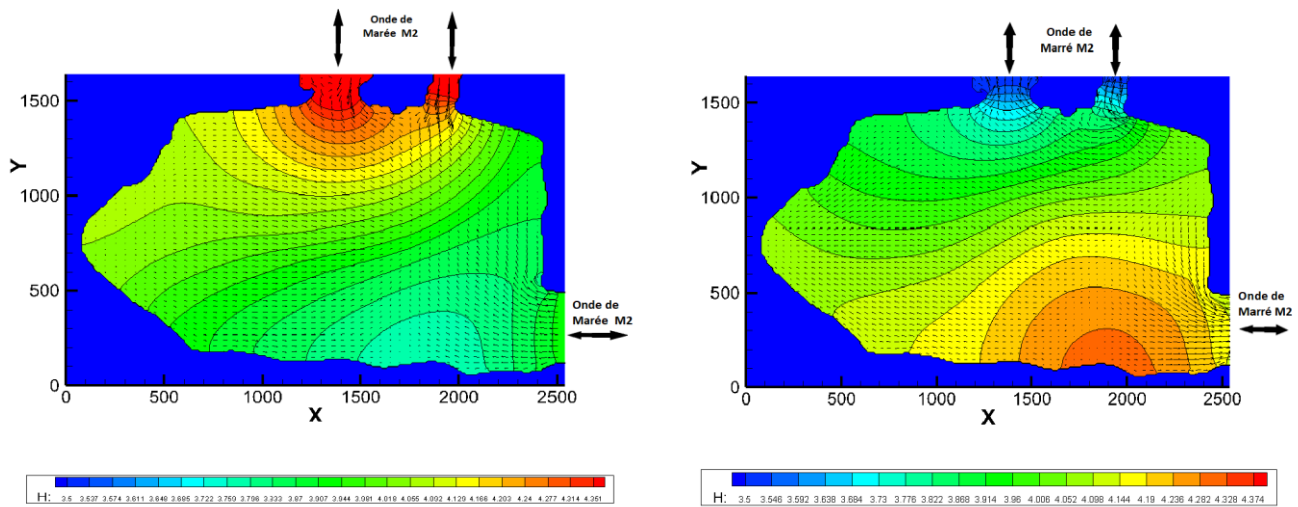


Figure 9. La hauteur d'eau de la marée à la lagune de Oualidia

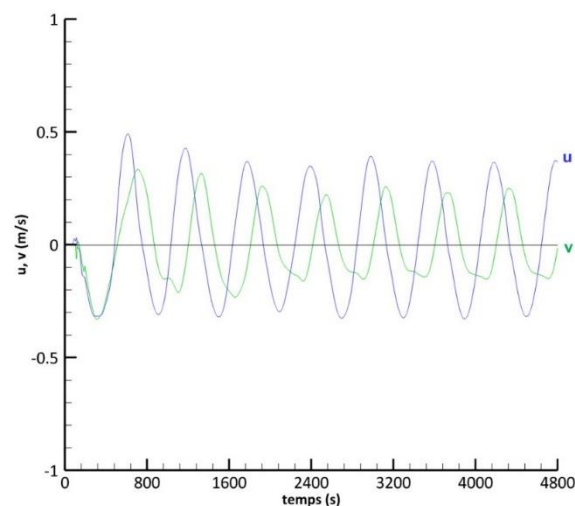


Figure 10. Variation de vitesse au niveau de la limite Sud-Est

L'examen de cette figure montre un déphasage entre les deux composante d'environ $\pi/2$ (résultat connu pour la propagation d'onde en 2D). Nous observons également une asymétrie dans les courbes de u et v . La présence de cette asymétrie n'a rien de surprenant, puis qu'elle est générée par les termes non-linéaire que contiennent les équations de Saint-Venant (frottement au fond quadratique, accélération convective, gradient de la hauteur d'eau). En d'autre terme, une analyse de Fourier sur ces deux courbes périodiques mettrait en évidence la génération d'harmoniques supérieures par les termes non-linéaire. Ce constat montre le bon comportement de notre modèle dans la prise en compte des termes non-linéaires

5. Conclusion

Dans ce papier, nous avons développé un modèle numérique pour la résolution des équations de Saint-Venant par La MBR. Pour le schéma de vitesse, nous avons adopté le modèle D2Q9, qui est largement suffisant pour couvrir les équations de Saint-Venant à partir de l'équation de Boltzmann. Tous les termes de force constituant la force F (équation 5) ont été intégrés dans le modèle

numérique. Dans un premier temps, le modèle a été appliqué et comparé avec succès à divers cas académiques en hydraulique. La diversité de ces cas ont permis également de tester la mise en œuvre des différentes conditions aux limites dans le modèle. Dans un second temps le modèle a été appliqué au cas schématique de la propagation de l'onde de marée dans la lagune de Oualidia. De ces simulations nous retenons que le modèle a reproduit correctement les caractéristiques de l'hydrodynamique de la propagation d'une onde de marée. De même le modèle a reproduit les effets des termes non linéaire par des asymétrie dans l'évolution temporelle des variables de l'écoulement. Les développements de ce modèle seront poursuivis pour aboutir à un code opérationnel couplant plusieurs composantes des écoulements côtiers.

6. Bibliographie

- [ZHO 10] Zhou, Jian Guo, et al. "Lattice Boltzmann method for open-channel flows." *Proceedings of the Institution of Civil Engineers-Engineering and Computational Mechanics* 163.4 (2010): 243-249.
- [BOL 78] Boltzmann, Ludwig (1878). *Weiter Studien über das Wärmegleichgewicht unter Gasmolekülen*. Wien. Ber. 66, 275-370.
- [BGK 54] Bhatnagar, P., Gross, E., and Krook M. (1954): A model for collision process in gases. I.: Small amplitude process in charged and neutral one-component systems. *Phys.Rev.* 94(3), 511-525.
- [ZHO 04] Zhou, Jian Guo. *Lattice Boltzmann methods for shallow water flows*. Vol. 4. Berlin: Springer, 2004.
- [BUD 14] Budinski, Ljubomir. "MRT lattice Boltzmann method for 2D flows in curvilinear coordinates." *Computers & Fluids* 96 (2014): 288-301.