Entropie : thermodynamique – énergie – environnement – économie
2026, vol. 7, n° Spécial LILA 3, 97-109 pages, DOI: 10.21494/ISTE.OP.2026.1434 ISTE OpenScience

Axiomes et théorème d'unicité de l'entropie et de l'information

Axioms and uniqueness theorem of information entropies

A. El Kaabouchi[1] and Alexandre Wang[2]

[1]ESTACA Campus Ouest Parc universitaire Laval-Changé Rue Georges Charpak,
BP 76121 53061 Laval cedex 9, France
aziz.elkaabouchi@estaca.fr
[2]ESIEA Lab, SCIQ, ESIEA, 9 Rue Vésale, 75005 Paris, France
alexandre.wang@esiea.fr

RÉSUMÉ. Dans ce travail, nous proposons une nouvelle démonstration du théorème d'unicité pour une famille d'entropies incluant celle de Shannon. La structure axiomatique classique, proposée par Shannon et Khinchin dans leurs travaux fondateurs, est ici modifiée en utilisant moins d'hypothèses, et surtout sans recourir aux axiomes relatifs à l'entropie thermodynamique, à savoir : le fait que le maximum de l'entropie correspond à une distribution de probabilité uniforme *ou* que l'entropie est une fonction croissante du nombre total d'états d'un système. Ces deux postulats sont une partie des raisons expliquant le lien de parenté entre les notions d'entropie et d'information.
ABSTRACT. In this work, we provide a new proof of the uniqueness theorem for a family of entropy formulas including Shannon's entropy. The conventional axiomatic structure, proposed by Shannon and Khinchin in their seminal work, is modified by using fewer assumptions and especially without using the axioms relative to thermodynamic entropy, i.e., the maximum of entropy corresponds to uniform probability distributions, or the entropy is an increasing function of the total number of states of a system, which are just part of the reasons for the kin relationship between the two notions.
KEYWORDS. Entropie, Entropie de Shannon; Entropie de Tsallis; Théorème d'unicité; Théorie de l'information; Entropie généralisée; Entropie conditionnelle.

1. Introduction

L'entropie et l'information comptent parmi les concepts les plus fondamentaux de la thermodynamique, de la mécanique statistique et de la théorie de l'information (voir [1], [2], [3]). Selon un point de vue largement accepté, entropie et information sont deux appellations d'une même entité : une mesure du désordre ou de l'incertitude probabiliste. On peut se demander pourquoi ces deux concepts, qui semblent parfois si différents, sont liés de manière aussi étroite. En effet, l'information est une quantité subjective, tandis que l'entropie, directement liée à la chaleur et à la température dans les systèmes thermodynamiques, devrait être une grandeur objective, indépendante de notre connaissance du système. L'origine de ce lien remonte au travail fondateur de Shannon (voir [2]), qui a souligné que l'information qu'il définissait pour la communication possédait les mêmes propriétés que l'entropie. Cet argument justifie l'utilisation de deux axiomes importants dans la démonstration du théorème d'unicité de la formule de Shannon :

$$I\left(p_1,\ldots,p_n\right)=-\sum_{i=1}^{W}p_i\ln(p_i) \tag{1}$$

où I désigne l'information ou l'entropie (que nous appellerons simplement entropie par la suite) et W le nombre d'états microscopiques discrets, chacun ayant une probabilité p_i $(i=1,2,\ldots,W)$. Ces deux axiomes sont : I est une fonction croissante de W (voir [2]) et le maximum de I correspond à la distribution uniforme $p_i=\dfrac{1}{W}$ (voir [3]). Cette approche du théorème d'unicité de l'entropie a été reprise par d'autres chercheurs (voir [4], [5]) dans le cadre des entropies généralisées, incluant notamment la formule de Tsallis :

$$I_q(p) = \frac{1}{1-q}\left(\sum_{i=1}^{W} p_i^q - 1\right) \quad \text{avec} \quad q \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}. \tag{2}$$

dont l'entropie de Shannon constitue un cas limite, puisque $I = \lim_{q\to 1} I_q$. La relation entre l'information en théorie de la communication et l'entropie en thermodynamique fait l'objet de débats depuis plusieurs décennies. C'est dans cette perspective que nous proposons ce travail, dont l'objectif est de prouver le théorème d'unicité sans faire appel aux hypothèses issues directement de l'entropie thermodynamique.

2. Préliminaires

Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, on note $[\![a, b]\!]$ l'ensemble des entiers naturels n tels que : $a \le n \le b$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, Δ_n et Δ désignent respectivement les ensembles suivants

$$\Delta_n = \left\{ p = (p_1, \dots p_n) \in [0,1]^n, \sum_{i=1}^{n} p_i = 1 \right\} \quad \text{et} \quad \Delta = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \Delta_n.$$

Soit I une application de Δ dans $\mathbb{R}$. On note $\tilde{I}$ l'application de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \tilde{I}(n) = I\left(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right).$$

Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire finie définie sur Ω avec $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$. On note

$$I(X) = I\left((\mathbb{P}(X = x_i))_{i\in I}\right).$$

Soient X et Y deux variables aléatoires finies définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$ avec $(X, Y)(\Omega) = \{(x_i, y_j); (i, j) \in K\}$. On note

$$I(Y \mid X = x_i) = I\left((\mathbb{P}(Y = y_j \mid X = x_i))_{j\,:\,(i,j)\in K}\right).$$

• Dans [2] et avec les notations précédentes, A. Rényi montre que si I est une fonction symétrique définie sur Δ, vérifiant

(i) L'application $I : p \mapsto I(p, 1-p)$ est continue sur $[0, 1]$;

(ii) L'application $I\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 1$;

(iii) Pour tout entier n avec $n \ge 2$ et pour tout $p = (p_1, \dots, p_n) \in \Delta_n$, on a

$$I(p_1, \dots, p_n) = I(p_1 + p_2, p_3, \cdots, p_n) + (p_1 + p_2)^q\, I\left(\frac{p_1}{p_1 + p_2}, \frac{p_2}{p_1 + p_2}\right). \tag{3}$$

Alors $I(p_1, \dots, p_n) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \ln(p_i)$

• Plusieurs chercheurs se sont intéressés à l'extension de ce résultat aux différentes entropies généralisées, citons R. J. Y. dos Santos qui montre dans [5], que pour $q \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, si I_q est une fonction symétrique définie sur Δ, vérifiant

(i) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad I_q : (p_1, \ldots, p_n) \mapsto I_q\,(p_n, \ldots, p_n)$ est continue sur Δ_n ;

(ii) $\tilde{I}_q : n \longmapsto \tilde{I}_q(n)$ est une suite croissante ;

(iii) Pour toutes variables aléatoires indépendantes finies X et Y, on a

$$I_q(X,Y) = I_q(X) + I_q(Y) + (1-q)I_q(X)I_q(Y)$$

(iv) Si on pose $s_1 = \sum\limits_{l=1}^{m_1} p_{1,l}$ et $s_2 = \sum\limits_{l=1}^{m_2} p_{2,l}$, on a

$$I_q\,(p_{1,1}, \ldots, p_{1,m_1}, p_{2,1}, \ldots, p_{2,m_2}) = I_q\,(s_1, s_2) + s_1^q I_q\left(\frac{p_{1,1}}{s_1}, \ldots, \frac{p_{1,m_1}}{s_1}\right) + s_2^q I_q\left(\frac{p_{2,1}}{s_2}, \ldots, \frac{p_{2,m_2}}{s_2}\right)$$

Alors, il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall p = (p_1, \ldots, p_n) \in \Delta_n, \quad I_q(p) = \frac{c}{1-q}\left(\sum_{i=1}^{n} p_i^q - 1\right).$$

$c = 1$ si $\tilde{I}_q\,(2) = \dfrac{1}{1-q}\left(2^{1-q} - 1\right)$.

• L'objectif de ce papier est de montrer qu'on peut remplacer (ii), (iii) et (iv) par la propriété suivante uniquement : pour tout $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ et pour tout $p = (p_1, \ldots, p_n) \in \Delta_n$, on a

$$I_q\,(p_1, \cdots, p_n) = I_q\,(p_1 + p_2, \cdots, p_n) + (p_1 + p_2)^q\, I_q\left(\frac{p_1}{p_1 + p_2}, \frac{p_2}{p_1 + p_2}\right).$$

Ce qui fera l'objet du théorème principal de cet article.

3. Théorème principal

Théorème 3.1. *Soient $q \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ et I_q une application symétrique de Δ dans $\mathbb{R}$ vérifiant*

(i) *L'application $I_q : p \mapsto I_q(p, 1-p)$ est continue sur $[0,1]$;*

(ii) *Pour tout entier n avec $n \geq 2$ et pour tout $p = (p_1, \ldots, p_n) \in \Delta_n$, on a*

$$I_q\,(p_1, \ldots, p_n) = I_q\,(p_1 + p_2, p_3, \cdots, p_n) + (p_1 + p_2)^q\, I_q\left(\frac{p_1}{p_1 + p_2}, \frac{p_2}{p_1 + p_2}\right) \tag{4}$$

Alors, pour tout entier n avec $n \geq 2$ et pour tout $p = (p_1, \ldots, p_n) \in \Delta_n$, on a

$$I_q(p) = \frac{1}{1-q}\left(\sum_{i=1}^{n} p_i^q - 1\right). \tag{5}$$

La démonstration de ce théorème repose sur plusieurs lemmes

Lemme 3.2. *On a les affirmations suivantes*

(i) $I_q(1) = 0$ *et* $I_q(1,0) = 0$ *;*

(ii) *Pour tout entier* n *avec* $n \geqslant 2$ *et pour tout* $p = (p_1, \ldots, p_n) \in \Delta_n$*, on a*

$$I_q\left(p_1, \cdots, p_n, 0\right) = I_q\left(p_1, \cdots, p_n\right);$$

(iii) *Pour tout entier naturel* n *avec* $n > 2$*, pour tout* $p = (p_1, \ldots, p_n) \in \Delta_n$ *et pour tout entier* m *avec* $2 \leq m < n$ *; si on pose* $s_m = p_1 + \ldots + p_m$*, alors*

$$I_q\left(p_1, \ldots, p_m, \cdots, p_n\right) = I_q\left(s_m, p_{m+1}, \cdots, p_n\right) + s_m^q I_q\left(\frac{p_1}{s_m}, \cdots, \frac{p_m}{s_m}\right); \tag{6}$$

(iv) *De manière générale, si on pose* $s_j = \sum_{l=1}^{m_j} p_{j,l}$ *alors*

$$I_q\left(p_{1,1}, \ldots, p_{1,m_1}, \ldots, p_{n,1}, \ldots, p_{n,m_n}\right) = I_q\left(s_1, \ldots, s_n\right) + \sum_{j=1}^{n} s_j^q I_q\left(\frac{p_{j,1}}{s_j}, \cdots, \frac{p_{j,m_j}}{s_j}\right); \tag{7}$$

(v) *Pour tout entier* n *avec* $n \geqslant 2$*, l'application* $I_q : (p_1, \ldots, p_n) \longmapsto I_q\left(p_1, \ldots, p_n\right)$ *est continue sur* Δ_n*.*

Proof.

(i) $I_q(1) = 0$ et $I_q(1,0) = 0$. En effet, d'après (4), on a

D'une part

$$I_q\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = I_q(1) + 1^q I_q\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = I_q(1) + I_q\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

d'où $I_q(1) = 0$.

D'autre part, pour $n = 3$, $p_1 = \frac{1}{2}$, $p_2 = \frac{1}{2}$ et $p_3 = 0$, l'égalité (4) implique

$$I_q\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) = I_q\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}, 0\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)^q I_q\left(\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}, \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}\right)$$

Ou encore

$$I_q\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) = I_q(1,0) + I_q\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \tag{8}$$

Et pour $n = 3$, $p_1 = 0$, $p_2 = \frac{1}{2}$ et $p_3 = \frac{1}{2}$, l'égalité (4) implique

$$I_q\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = I_q\left(0 + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) + \left(0 + \frac{1}{2}\right)^q I_q\left(\frac{0}{0 + \frac{1}{2}}, \frac{\frac{1}{2}}{0 + \frac{1}{2}}\right)$$

Ou encore

$$I_q\left(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=I_q\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)^q I_q(0,1) \tag{9}$$

Des égalités (8) et (9), on déduit

$$I_q(1,0)+I_q\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=I_q\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)^q I_q(0,1)$$

Ou encore

$$I_q(1,0)=\left(\frac{1}{2}\right)^q I_q(0,1)$$

D'où : $I_q(1,0)=0$.

(ii) $I_q\left(p_1,\ldots,p_n,0\right)=I_q\left(p_1,\ldots,p_n\right)$. En effet,

• Pour $n\in\mathbb{N}^*$ et $(p_1,\cdots,p_{n+1})\in\Delta_{n+1}$ avec $p_{n+1}=0$, l'égalité (4) implique

$$I_q\left(p_1,\ldots,p_n,0\right)=I_q\left(0,p_1,\ldots,p_n\right)=I_q\left(0+p_1,\ldots,p_n\right)+(0+p_1)^q I_q\left(0,\frac{p_1}{0+p_1}\right)$$

Ou encore

$$I_q\left(p_1,\ldots,p_n,0\right)=I_q\left(p_1,\ldots,p_n\right)+p_1^q I_q\left(0,1\right). \tag{10}$$

Et comme : $I_q\left(0,1\right)=I_q\left(1,0\right)=0$, on déduit de (10) que

$$I_q\left(p_1,\ldots,p_n,0\right)=I_q\left(p_1,\ldots,p_n\right).$$

(iii) Soit n un entier avec $n\geq 3$ et pour tout $p=(p_1,\ldots,p_n)\in\Delta_n$ montrons par récurrence sur $m\in[\![2;n-1]\!]$ que

$$I_q\left(p_1,\ldots,p_m,p_{m+1},\cdots,p_n\right)=I_q\left(s_m,p_{m+1},\ldots,p_n\right)+s_m^q I_q\left(\frac{p_1}{s_m},\cdots,\frac{p_n}{s_m}\right). \tag{11}$$

D'après l'égalité (4), la formule est vraie pour $m=2$ ($s_1=p_1+p_2$). Supposons qu'elle soit démontrée jusqu'à $m-1$ et posons $t_{m-1}=(p_1+p_2)+p_3+\ldots+p_m=s_m$.

On a d'une part, (pour $m=2$)

$$I_q\left(p_1,\ldots,p_n\right)=I_q\left(p_1+p_2,p_3,\cdots,p_n\right)+(p_1+p_2)^q\, I_q\left(\frac{p_1}{p_1+p_2},\frac{p_2}{p_1+p_2}\right) \tag{12}$$

Et d'autre part, d'après l'hypothèse de récurrence au rang $m-1$,

$$I_q\left(p_1+p_2,\ldots,p_m,,\cdots,p_n\right)=I_q\left(t_{m-1},p_{m+1},\ldots,p_n\right)+t_{m-1}^q I_q\left(\frac{p_1+p_2}{t_{m-1}},\cdots,\frac{p_n}{t_{m-1}}\right)$$

Ou encore

$$I_q\left(p_1+p_2,\ldots,,p_{m+1},\cdots,p_n\right)=I_q\left(s_m,p_{m+1},\ldots,p_n\right)+s_m^q I_q\left(\frac{p_1+p_2}{s_m},\cdots,\frac{p_n}{s_m}\right) \tag{13}$$

En additionnant les égalités (12) et (13), puis en simplifiant l'égalité obtenue, on obtient comme premier membre $I_q(p_1,\ldots,p_n)$ et comme second membre

$$I_q(s_m,p_{m+1},\ldots,p_n)+s_m^q I_q\left(\frac{p_1+p_2}{s_m},\cdots,\frac{p_n}{s_m}\right)+(p_1+p_2)^q I_q\left(\frac{p_1}{p_1+p_2},\frac{p_2}{p_1+p_2}\right) \tag{14}$$

Remarquons ensuite que

$$(p_1+p_2)^q I_q\left(\frac{p_1}{p_1+p_2},\frac{p_2}{p_1+p_2}\right)=s_m^q\left(\frac{p_1}{s_m}+\frac{p_2}{s_m}\right)^q I_q\left(\frac{\frac{p_1}{s_m}}{\frac{p_1}{s_m}+\frac{p_2}{s_m}},\frac{\frac{p_2}{s_m}}{\frac{p_1}{s_m}+\frac{p_2}{s_m}}\right) \tag{15}$$

Or d'après l'égalité (4), on a

$$\left(\frac{p_1}{s_m}+\frac{p_2}{s_m}\right)^q I_q\left(\frac{\frac{p_1}{s_m}}{\frac{p_1}{s_m}+\frac{p_2}{s_m}},\frac{\frac{p_2}{s_m}}{\frac{p_1}{s_m}+\frac{p_2}{s_m}}\right)=I_q\left(\frac{p_1}{s_m},\ldots,\frac{p_n}{s_m}\right)-I_q\left(\frac{p_1+p_2}{s_m},\ldots,\frac{p_n}{s_m}\right)$$

Il s'ensuit que

$$(p_1+p_2)^q I_q\left(\frac{p_1}{p_1+p_2},\frac{p_2}{p_1+p_2}\right)=s_m^q\left[I_q\left(\frac{p_1}{s_m},\ldots,\frac{p_n}{s_m}\right)-I_q\left(\frac{p_1+p_2}{s_m},\ldots,\frac{p_n}{s_m}\right)\right] \tag{16}$$

Autrement-dit

$$(p_1+p_2)^q I_q\left(\frac{p_1}{p_1+p_2},\frac{p_2}{p_1+p_2}\right)+s_m^q I_q\left(\frac{p_1+p_2}{s_m},\frac{p_3}{s_m},\cdots\frac{p_n}{s_m}\right)=s_m^q I_q\left(\frac{p_1}{s_m},\cdots\frac{p_n}{s_m}\right). \tag{17}$$

Des égalités (12), (13) et (17) on déduit l'égalité (6).

(iv) L'égalité (7) s'obtient immédiatement par application répétée de (6) en tenant compte de la symétrie de I_q.

(v) Par récurrence sur n,

Pour $n=2$, soit $(x_k,y_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'éléments de Δ_2 qui converge vers (x,y). Ce dernier appartient à Δ_2 (car Δ_2 est fermé). On a

La suite de terme général $I_q(x_n,y_n)=I_q(x_n,1-x_n)$ converge quand n tend vers ∞ vers $I_q(x,1-x)$ d'après (ii) du théorème 3.1.

Donc l'application $I_q:(x,y)\longmapsto I_q(x,y)$ est continue sur Δ_2.

Supposons que la propriété soit vraie pour tout entier k avec $2\leqslant k\leqslant n$ et montrons que l'application $I_q:(p_1,\ldots,p_n,p_{n+1})\longmapsto I_q(p_1,\ldots,p_n,p_{n+1})$ est continue sur Δ_{n+1}.

Soient $\left(p_1^{(m)},\ldots,p_{n+1}^{(m)}\right)_m$ une suite d'éléments de Δ_{n+1} qui converge vers l'élément $(p_1,\ldots,p_{n+1})$. Ce dernier appartient à Δ_{n+1} (car Δ_{n+1} est fermé), ainsi

$$p_{n+1}=1-(p_1+\cdots+p_n).$$

Comme

- $\left(p_{n+1}^{(m)}+p_1^{(m)},p_2^{(m)},\ldots,p_n^{(m)}\right)\underset{m\to+\infty}{\longrightarrow}\left(p_{n+1}+p_1,p_2,\ldots,p_n\right)$ donc

  $$I_q\left(p_{n+1}^{(m)}+p_1^{(m)},p_2^{(m)},\ldots,p_n^{(m)}\right)\underset{m\to+\infty}{\longrightarrow}I_q\left(p_{n+1}+p_1,p_2,\cdots p_n\right).$$

- $\left(p_{n+1}^{(m)},p_1^{(m)}\right)\underset{m\to+\infty}{\longrightarrow}(p_{n+1},p_1)$, donc $\left(p_{n+1}^{(m)}+p_1^{(m)}\right)^q\underset{m\to+\infty}{\longrightarrow}(p_{n+1}+p_1)^q$ et

  $$\left(\frac{p_{n+1}^{(m)}}{p_{n+1}^{(m)}+p_1^{(m)}},\frac{p_1^{(m)}}{p_{n+1}^{(m)}+p_1^{(m)}}\right)\underset{m\to+\infty}{\longrightarrow}\left(\frac{p_{n+1}}{p_{n+1}+p_1},\frac{p_1}{p_{n+1}+p_1}\right)$$

Il en découle que

$$\left(p_{n+1}^{(m)}+p_1^{(m)}\right)^q I_q\left(\frac{p_{n+1}^{(m)}}{p_{n+1}^{(m)}+p_1^{(m)}},\frac{p_1^{(m)}}{p_{n+1}^{(m)}+p_1^{(m)}}\right)$$

Converge quand m tend vers ∞ vers

$$(p_{n+1}+p_1)^q I_q\left(\frac{p_{n+1}}{p_{n+1}+p_1},\frac{p_1}{p_{n+1}+p_1}\right).$$

Par ailleurs, d'après (i) et (4) on a successivement

$$\begin{aligned}I_q\left(p_1^{(m)},p_2^{(m)},\ldots,p_n^{(m)},p_{n+1}^{(m)}\right)=&I_q\left(p_{n+1}^{(m)},p_1^{(m)},p_2^{(m)},\ldots,p_n^{(m)}\right)\\=&I_q\left(p_{n+1}^{(m)}+p_1^{(m)},p_2^{(m)},\ldots,p_n^{(m)}\right)+\\&\left(p_{n+1}^{(m)}+p_1^{(n)}\right)^q I_q\left(\frac{p_{n+1}^{(m)}}{p_{n+1}^{(m)}+p_1^{(m)}},\frac{p_1^{(m)}}{p_{n+1}^{(m)}+p_1^{(m)}}\right).\end{aligned}$$

En faisant tendre m vers ∞ dans les deux membres de l'égalité précédente, on obtient

$$\begin{aligned}\lim_{m\to\infty}I_q\left(p_1^{(m)},p_2^{(m)},\ldots,p_{n+1}^{(m)}\right)=&I_q\left(p_{n+1}+p_1,p_2,\ldots,p_n\right)+\\&(p_{n+1}+p_1)^q I_q\left(\frac{p_{n+1}}{p_{n+1}+p_1},\frac{p_1}{p_{n+1}+p_1}\right)\\=&I\left(p_{n+1},p_1,p_2,\ldots,p_n\right)\end{aligned}$$

Et par (i), on obtient

$$\lim_{m\to\infty}I_q\left(p_1^{(m)},p_2^{(m)},\ldots,p_{n+1}^{(m)}\right)=I\left(p_1,p_2,\ldots,p_n,p_{n+1}\right)$$

Ceci achève la preuve du lemme 3.2. □

Lemme 3.3. *Soit $q\in\mathbb{R}_+^*\setminus\{1\}$. Pour tout entier naturel non nul n, on a*

$$\tilde{I}_q(n)=\frac{1}{1-q}\left(n^{1-q}-1\right). \tag{18}$$

Proof. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, si dans (7), tous les m_j sont égaux à 2 et tous le $p_{j,l}$ à $\dfrac{1}{2n}$, on aurait au premier membre $\tilde{I}_q(2n)$ et au second membre

$$\tilde{I}_q(n) + n \cdot \frac{1}{n^q} \tilde{I}_q(2)$$

Autrement-dit,

$$\tilde{I}_q(2n) = \tilde{I}_q(n) + n^{1-q} \tilde{I}_q(2)$$

Comme

$$\tilde{I}_q(2n) = \tilde{I}_q(n \cdot 2)$$

Il s'ensuit que

$$\tilde{I}_q(n) + n^{1-q} \tilde{I}_q(2) = \tilde{I}_q(2) + 2^{1-q} \tilde{I}_q(n).$$

Donc

$$\tilde{I}_q(n) = \frac{\tilde{I}_q(2)}{1 - 2^{1-q}} \left(1 - n^{1-q}\right)$$

Dans le cas où $\tilde{I}_q\left(2\right) = \dfrac{1}{1-q}\left(2^{1-q} - 1\right)$, on obtient

$$\tilde{I}_q(n) = \frac{1}{1-q} \left(n^{1-q} - 1\right).$$

Ceci achève la preuve du lemme 3.3. □

Démonstration du théorème 3.1

Soit $p = \dfrac{a}{b}$ avec a, b deux entiers naturels non nuls et $a < b$.

Si on applique (7) avec $n = 2$, $m_1 = a$, $m_2 = b - a$,

$$p_{1,1} = \cdots = p_{1,m_1} = \frac{1}{b} \quad \text{et} \quad p_{2,1} = \cdots = p_{2,m_2} = \frac{1}{b}$$

On obtient

$$\begin{aligned}
\tilde{I}_q(b) =& I_q\left(\frac{1}{b}, \ldots, \frac{1}{b}; \frac{1}{b}, \ldots, \frac{1}{b}\right) \\
=& I_q\left(\frac{a}{b}, \frac{b-a}{b}\right) + \left(\frac{a}{b}\right)^q I_q\left(\frac{\frac{1}{b}}{\frac{a}{b}}, \ldots, \frac{\frac{1}{b}}{\frac{a}{b}}\right) + \left(\frac{b-a}{b}\right)^q \\
& \times I_q\left(\frac{\frac{1}{b}}{\frac{b-a}{b}}, \cdots, \frac{\frac{1}{b}}{\frac{b-a}{b}}\right).
\end{aligned}$$

Ou encore

$$\tilde{I}_q(b) = I_q\left(\frac{a}{b}, \frac{b-a}{b}\right) + \left(\frac{a}{b}\right)^q \tilde{I}_q(a) + \left(\frac{b-a}{b}\right)^q \tilde{I}_q(b-a)$$

Donc

$$I_q\left(\frac{a}{b}, \frac{b-a}{b}\right) = \tilde{I}_a(b) - \left(\frac{a}{b}\right)^q \tilde{I}_q(a) - \left(\frac{b-a}{b}\right)^q \tilde{I}_q(b-a).$$

Par ailleurs, d'après le lemme 3.3, on a

$$\begin{aligned} I_q\left(\frac{a}{b}, \frac{b-a}{b}\right) =& \frac{1}{1-q}\left(b^{1-q} - 1 - \left(\frac{a}{b}\right)^q (a^{1-q}-1) - \left(\frac{b-a}{b}\right)^q ((b-a)^{1-q}-1)\right) \\ =& \frac{1}{1-q}\left(\left(\frac{a}{b}\right)^q + \left(\frac{b-a}{b}\right)^q + b^{1-q} - 1 - ab^{-q} - (b-a)b^{-q}\right) \end{aligned}$$

Ou encore

$$I_q\left(\frac{a}{b}, \frac{b-a}{b}\right) = \frac{1}{1-q}\left(\left(\frac{a}{b}\right)^q + \left(\frac{b-a}{b}\right)^q - 1\right).$$

Et d'après (v) du lemme 3.2, on obtient

$$\forall p \in [0,1]; \quad I_q(p, 1-p) = \frac{1}{1-q}\left(p^q + (1-p)^q - 1\right)$$

Ceci prouve que $I_q\left(p_1, \ldots, p_n\right) = \frac{1}{1-q}\left(\sum_{i=1}^n p_i^q - 1\right)$ est vraie pour $n = 2$ et tout $(p_1, p_2) \in \Delta_2$.

Supposons que pour tout $p = (p_1, \ldots, p_n) \in \Delta_n$, $I_q\left(p_1, \ldots, p_n\right) = \frac{1}{1-q}\left(\sum_{i=1}^n p_i^q - 1\right)$ et montrons que

$$\forall p = (p_1, \ldots, p_{n+1}) \in \Delta_{n+1}, \quad I_q\left(p_1, \ldots, p_n, p_{n+1}\right) = \frac{1}{1-q}\left(\sum_{i=1}^{n+1} p_i^q - 1\right).$$

On a

$$\begin{aligned} I_q\left(p_1, \ldots, p_n, p_{n+1}\right) &= I_q\left(p_n, p_{n+1}, p_1, \cdots p_{n-1}\right) \\ &= I_q\left(p_n + p_{n+1}, p_1, \cdots p_{n-1}\right) + (p_n + p_{n+1})^q\, I_q\left(\frac{p_n}{p_n + p_{n+1}}, \frac{p_{n+1}}{p_n + p_{n+1}}\right) \\ &= \frac{1}{1-q}\left((p_n + p_{n+1})^q + \sum_{i=1}^{n-1} p_i^q - 1\right) + (p_n + p_{n+1})^q \frac{1}{1-q} \\ &\qquad \times \left(\left(\frac{p_n}{p_n + p_{n+1}}\right)^q + \left(\frac{p_{n+1}}{p_n + p_{n+1}}\right)^q - 1\right) \\ &= \frac{1}{1-q}\left(\sum_{i=1}^{n-1} p_i^q + p_n^q + p_{n+1}^q - 1\right) \\ &= \frac{1}{1-q}\left(\sum_{i=1}^{n+1} p_i^q - 1\right) \end{aligned}$$

Ceci achève la démonstration par récurrence puis celle du théorème 3.1.

Théorème 3.4. *Soient $q \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ et I_q une application symétrique de Δ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $\tilde{I}_q(2) = \frac{1}{1-q}\left(2^{1-q}-1\right)$. On suppose que*

(i) *L'application $I_q : p \mapsto I_q(p, 1-p)$ est continue sur $[0,1]$;*

(ii)* *Pour toutes variables aléatoires finies X et Y définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$, on a*

$$I_q(X,Y) = I_q(X) + \sum_{i=1}^{n} \left(\mathbb{P}\left(X = x_i\right)\right)^q I_q\left(Y \mid X = x_i\right) \tag{19}$$

Alors, pour tout entier n avec $n \geq 2$ et pour tout $p = (p_1, \ldots, p_n) \in \Delta_n$, on a

$$I_q(p) = \frac{1}{1-q}\left(\sum_{i=1}^{n} p_i^q - 1\right) \tag{20}$$

La démonstration de ce théorème repose sur le lemme suivant.

Lemme 3.5. *Les hypothèses du 3.4 impliquent les propriétés suivantes*

(i) $I_q(1) = 0$*;*

(iii) *Pour tout entier n avec $n \geq 2$ et pour tout $p = (p_1, \ldots, p_n) \in \Delta_n$, on a*

$$I_q\left(p_1, \ldots, p_n\right) = I_q\left(p_1 + p_2, p_3, \cdots, p_n\right) + \left(p_1 + p_2\right)^q I_q\left(\frac{p_1}{p_1+p_2}, \frac{p_2}{p_1+p_2}\right). \tag{21}$$

Proof.

(i) $I_q(1) = 0$. En effet, considérons deux variables aléatoires X et Y définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$ comme suit

$$X(\Omega) = \{x_1\}; \quad Y(\Omega) = \{y_1, y_2\}; \quad (X,Y)(\Omega) = \{(x_1, y_1); (x_1, y_2)\};$$
$$\mathbb{P}\left(X = x_1\right) = 1; \quad \mathbb{P}\left(Y = y_1 \mid X = x_1\right) = 1; \quad \mathbb{P}\left(Y = y_2 \mid X = x_1\right) = 0.$$

Calculons $I_q((X,Y))$, $I_q(X)$ et $I_q(Y \mid X) = \sum_{i=1}^{n} \left(\mathbb{P}\left(X = x_i\right)\right)^q I_q\left(Y \mid X = x_i\right)$.

Comme

$$\mathbb{P}\left(X = x_1, Y = y_1\right) = \mathbb{P}\left(X = x_1\right)\mathbb{P}\left(Y = y_1 \mid X = x_1\right) = 1 \cdot 1 = 1;$$

$$\mathbb{P}\left(X = x_1, Y = y_2\right) = \mathbb{P}\left(X = x_1\right)\mathbb{P}\left(Y = y_2 \mid X = x_1\right) = 1 \cdot 0 = 0;$$

On en déduit que

- $I_q((X,Y)) = I_q\left((\mathbb{P}((X,Y)=(x_i,y_j)))_{(i,j)\text{ avec }(x_i,y_j)\in(X,Y)(\Omega)}\right) = I_q(1,0)\,.$

- $I_q(X) = I_q\left((\mathbb{P}(X=x_i))_{i\in[\![1,n]\!]}\right) = I_q(1)$ et $I_q(Y \mid X) = I_q(1,0)$, car

$$\begin{aligned}
I_q(Y \mid X) &= \sum_{i=1}^{n} (\mathbb{P}(X=x_i))^q\, I_q(Y \mid X = x_i) \\
&= (\mathbb{P}(X=x_1))^q\, I_q(Y \mid X=x_1) \\
&= (1)^q \cdot I_q((Y=y_1 \mid X=x_1), (Y=y_2 \mid X=x_1)) \\
&= I_q(1,0)\,.
\end{aligned}$$

D'après (20), on obtient

$$I_q(1,0) = I_q(1) + (1)^q\, I_q(1,0)$$

D'où $I_q(1) = 0$.

(iii) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ avec $n \geq 2$ et $p = (p_1, \cdots p_n) \in \Delta_n$. considérons deux variables aléatoires X et Y définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$ comme suit

$X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_{n-1}\}, \quad Y(\Omega) = \{y_1, y_2\}$;

$(X,Y)(\Omega) = \{(x_1,y_1); (x_1,y_2); (x_i,y_1) \quad \text{pour} \quad i \in [\![2, n-1]\!]\}$.

$\mathbb{P}(X=x_1) = p_1 + p_2; \quad \mathbb{P}(X=x_i) = p_{i+1}$ pour $i \in [\![2, n-1]\!]$;

$\mathbb{P}(Y=y_1 \mid X=x_1) = \dfrac{p_1}{p_1+p_2}; \quad \mathbb{P}(Y=y_2 \mid X=x_1) = \dfrac{p_2}{p_1+p_2}$;

$\mathbb{P}(Y=y_1 \mid X=x_i) = 1$ pour $i \in [\![2, n-1]\!]$;

Calculons $I_q((X,Y))$, $I_q(X)$ et $I_q(Y \mid X) = \sum_{i=1}^{n-1} (\mathbb{P}(X=x_i))^q\, I_q(Y \mid X=x_i)$. Comme

$$\mathbb{P}(X=x_1, Y=y_1) = \mathbb{P}(X=x_1)\,\mathbb{P}(Y=y_1 \mid X=x_1) = (p_1+p_2)\frac{p_1}{p_1+p_2} = p_1\ ;$$

$$\mathbb{P}(X=x_1, Y=y_2) = \mathbb{P}(X=x_1)\,\mathbb{P}(Y=y_2 \mid X=x_1) = (p_1+p_2)\frac{p_2}{p_1+p_2} = p_2\ ;$$

$$\mathbb{P}(X=x_i, Y=y_1) = \mathbb{P}(X=x_i)\,\mathbb{P}(Y=y_1 \mid X=x_i) = p_{i+1} \cdot 1 = p_{i+1}.$$

On en déduit que

- $I_q((X,Y)) = I_q\left((\mathbb{P}((X,Y)=(x_i,y_j)))_{(i,j)\text{ avec }(x_i,y_j)\in(X,Y)(\Omega)}\right) = I_q(p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n)\,.$

- $I_q(X) = I_q\left((\mathbb{P}(X=x_i))_{i\in[\![1,n-1]\!]}\right) = I_q(p_1+p_2, p_3, \ldots, p_n)$ et

• $I_q(Y \mid X) = (p_1+p_2)^q \, I_q\left(\frac{p_1}{p_1+p_2}, \frac{p_2}{p_1+p_2}\right)$, car

$$\begin{aligned}
I_q(Y \mid X) &= \sum_{i=1}^{n-1} \left(\mathbb{P}\left(X = x_i\right)\right)^q I_q\left(Y \mid X = x_i\right) \\
&= \left(\mathbb{P}\left(X = x_1\right)\right)^q I_q\left(Y \mid X = x_1\right) + \sum_{i=2}^{n-1} \left(\mathbb{P}\left(X = x_i\right)\right)^q I_q\left(Y \mid X = x_i\right) \\
&= (p_1+p_2)^q \cdot I_q\left(\left(Y = y_1 \mid X = x_1\right), \left(Y = y_2 \mid X = x_1\right)\right) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad + \sum_{i=2}^{n-1} p_{i+1}^q \cdot I_q\left(Y = y_1 \mid X = x_i\right)
\end{aligned}$$

Ou encore

$$\begin{aligned}
I_q(Y \mid X) &= (p_1+p_2)^q \, I_q\left(\frac{p_1}{p_1+p_2}, \frac{p_2}{p_1+p_2}\right) + \sum_{i=2}^{n-1} p_{i+1}^q I_q(1) \\
&= (p_1+p_2)^q \, I_q\left(\frac{p_1}{p_1+p_2}, \frac{p_2}{p_1+p_2}\right) + \sum_{i=2}^{n-1} p_{i+1}^q \cdot 0 \\
&= (p_1+p_2)^q \, I_q\left(\frac{p_1}{p_1+p_2}, \frac{p_2}{p_1+p_2}\right).
\end{aligned}$$

D'après (19), on obtient

$$I_q\left(p_1, \cdots, p_n\right) = I_q\left(p_1+p_2, p_3, \cdots, p_n\right) + (p_1+p_2)^q \, I_q\left(\frac{p_1}{p_1+p_2}, \frac{p_2}{p_1+p_2}\right).$$

Ceci achève la preuve du lemme 3.5. □

Démonstration du théorème 3.4

C'est une conséquence immédiate du théorème 3.1 et du lemme 3.5.

4. Conclusion

En résumé, nous avons proposé une démonstration du théorème d'unicité des entropies, suivant l'approche de Shannon et Khinchin. Nous soulignons que deux axiomes essentiels de la démonstration traditionnelle (voir [2], [3]), relatifs à l'entropie thermodynamique, ne sont pas utilisés dans ce travail.

References

[1] L. Boltzmann, Weitere Studien über das Wärmegleichgewicht unter Gasmolekülen. Sitzungsberichte Akademie der Wissenschaften 66 (1872) 275-370. English translation: L. Boltzmann, Further Studies on the Thermal Equilibrium of Gas Molecules. The Kinetic Theory of Gases. History of Modern Physical Sciences. 1. pp. 262–349.

[2] C.E. Shannon, A Mathematical Theory of Communication. Bell System Technical Journal, 27 (1948) 379.

[3] A. I. Khinchin, Mathematical Foundations of Information Theory, Dover, New York, 1957.

[4] A. Rényi, Probability Theory, Dover Publications, Inc, pp. 547-553,2007.

[5] Roberto J. V. dos Santos, Generalization of Shannon's theorem for Tsallis entropy, *J. Math. Phys*, vol. 38, no. 8, pp. 4104-4106, 1997.

[6] Sumiyoshi Abe, Axioms and uniqueness theorem for Tsallis entropy, *Physics Letters A*, vol. 271, Issues 1–2, pp. 74-79, 2000.

