Un hommage aux travaux de J.A. Tenreiro Machado : Entropie et operateur fractionnaire

A tribute to the work of J.A. Tenreiro Machado: Entropy and fractional operator

Alexandra Galhano[1], António F.G. Tenreiro[2]

[1] Faculdade de Ciências Naturais, Engenharias e Tecnologias, Universidade Lusófona, Portugal, alexandra.galhano@ulusofona.pt
[2] Instituto de Ciência e Inovação em Engenharia Mecânica e Engenharia Industrial (INEGI), Porto, Portugal, atenreiro@inegi.up.pt

RÉSUMÉ. Cet article vise à mettre en évidence la recherche de J.A. Tenreiro Machado concernant l'interprétation probabiliste de la dérivée fractionnaire et sa définition d'entropie reconnue dans la littérature scientifique comme entropie de Machado. Cette présentation est contextualisée dans sa trajectoire de travail dans le domaine du calcul fractionnaire.

ABSTRACT. This paper aims to highlight J.A. Tenreiro Machado's research on the probabilistic interpretation of the fractional derivative and his definition of entropy recognized in the scientific literature as Machado's entropy. This presentation is contextualized in his work trajectory in the field of fractional calculus.

MOTS-CLÉS. Dérivée fractionnaire, calcul fractionnaire, interprétation géométrique, interprétation probabiliste, information, entropie.

KEYWORDS. fractional derivative, fractional calculus, geometric interpretation, probabilistic interpretation, information, entropy.

1. Introduction

J.A. Tenreiro Machado a soutenu, en 1989, sa thèse de doctorat, intitulée "Gestion des ressources structurelles pour le contrôle des robots manipulateurs" et, en 1995, l'agrégation, dans laquelle il a présenté la leçon générale "Problèmes de calcul dans le contrôle des robots", les deux à l'Université de Porto. Sa formation de base est en Génie Électrique, Automatisation et Contrôle. Sa recherche l'a poussé vers le Calcul Fractionnaire (CF). Son premier article [MAC 97] de CF a été publié en 1997 et propose une nouvelle méthode pour la conception de contrôleurs numériques d'ordre fractionnaire. Les algorithmes proposés adoptent le domaine temporel, et, conséquemment, sont bien adaptés à l'analyse de la transformée en Z et à la mise en œuvre numérique. Ayant un système mécanique comme prototype, l'algorithme de contrôle, basé sur le nouveau concept, révèle que les actions proportionnelles, intégrales et différentielles du contrôleur classique sont des cas particuliers d'un paradigme plus large. En fait, les contrôleurs basés sur le CF ont un meilleur comportement dynamique pour les systèmes avec des phénomènes non linéaires. Compte tenu de ses antécédents, il a continué à publier dans le CF, sur les contrôleurs fractionnaires. On peut nommer, entre autres, la conception de contrôleurs à temps discret d'ordre fractionnaire [MAC 01], basée sur des concepts évolutionnaires, le calcul d'algorithmes de contrôle fractionnaire [MAC 10a], l'étude de l'optimisation des algorithmes d'ordre complexe pour le contrôle à temps discret des systèmes linéaires et non linéaires [MAC 13a], l'étude des phénomènes chaotiques et dynamiques d'ordre fractionnaire dans le contrôle de la trajectoire de manipulateurs redondants [DUA 02], le contrôle fractionnaire de la position et de la force des manipulateurs robotiques [FER 05], l'analyse cinématique d'ordre fractionnaire de manipulateurs d'inspiration biomécanique [MAC 20], entre autres. Dans l'analyse de systèmes dynamiques, on peut souligner l'étude de la dynamique d'un système composé d'une collection de particules qui subissent des collisions entre elles [MAC 11a], l'étude avec l'utilisation de l'échelle multidimensionnelle dans l'évaluation des systèmes fractionnaires [MAC 12a], la formulation d'un algorithme génétique et sa description au moyen d'un modèle fractionnaire, qui fait évoluer deux types d'objets dans un plan favorisant une relation entre eux [MAC 13b], une expérience conceptuelle intégrant le modèle d'une balle rebondissante et la formulation de Grünwald-Letnikov pour la dérivée d'ordre fractionnaire [MAC 21].

Une perspective probabiliste de la dérivée d'ordre fractionnaire est présenté premièrement en [MAC 03] et, plus tard, cette idée est reprise avec la réponse en fréquence des approximations rationnelles de Padé, à savoir la limite basse fréquence de la largeur de bande. En [MAC 09], la comparaison des perspectives temporelles et en fréquence est faite, conduisant à des conclusions similaires sur l'effet de mémoire des dérivées d'ordre fractionnaire. L'étude des principes fondamentaux des probabilités négatives et du calcul fractionnaire est présenté permettant d'établir plusieurs analogies entre ces deux sujets [MAC 13c].

J.A. Tenreiro Machado introduit le concept d'entropie dans l'analyse de systèmes à particules multiples avec un comportement entier et fractionnaire [MAC 10b], dans l'analyse les informations sur l'ADN en utilisant les concepts d'entropie et de plan de phase [MAC 11b], dans l'étude des informations chromosomiques de vingt-cinq espèces différentes [MAC 12b], traitant les chromosomes dans la perspective d'une relation loi de puissance entre l'information moyenne et le nombre total de mots [MAC 12c], dans l'analyse de l'effet des erreurs de troncature de la dérivée d'ordre fractionnaire [MAC 12d]. En [MAC 13d], il étudie un système dynamique discret de particules en interaction qui évoluent en agissant les unes sur les autres. Ce modèle est une abstraction du monde naturel, les systèmes réels pouvant aller de l'immense échelle cosmologique à l'échelle de la cellule biologique. Différentes conditions d'évolution du système sont testées et les modèles émergents sont analysés au moyen de la dimension fractale et des mesures d'entropie. La population de particules évolue vers des objets géométriques de nature fractale et la signature temporelle de l'entropie peut être interprétée à la lumière des systèmes dynamiques complexes. En [MAC 13d], il formule une nouvelle expression pour l'entropie, inspirée par des propriétés du calcul fractionnaire, testant ces caractéristiques sur des distributions de probabilité standard et sur des séries de données réelles. Les résultats révèlent que le réglage de l'ordre fractionnaire permet une grande sensibilité à l'évolution du signal, ce qui est utile pour décrire la dynamique des systèmes complexes.

Cet article présente les travaux de J.A. Tenreiro Machado parmi lesquels, dans la section 2, la perspective probabiliste de la dérivée d'ordre fractionnaire et, dans la section 3 l'information généralisée d'ordre fractionnaire. La section 4 conclut avec des remarques finales.

2. Une perspective probabiliste de la dérivée d'ordre fractionnaire

En [MAC 03], J.A. Tenreiro Machado présente une interprétation probabiliste de la dérivée d'ordre fractionnaire. Prenant comme base la définition de Grünwald-Letnikov de la dérivée fractionnaire d'ordre α

$$D^{\alpha}[x(t)] = \lim_{h\to 0} \left[\frac{1}{h^{\alpha}}\sum_{k=0}^{\infty}\gamma(\alpha,k)x(t-kh)\right] \tag{1}$$

$$\gamma(\alpha,k) = (-1)^k \frac{\Gamma(\alpha+1)}{k!\Gamma(\alpha-k+1)} \tag{2}$$

où Γ représente la fonction gamma, et h l'incrément de temps. Considérant $0 \le \alpha \le 1$, on a

$$\gamma(\alpha,0) = 1 \tag{3}$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty}\gamma(\alpha,k) = 1 \tag{4}$$

Du point de vue de la théorie des probabilités, ces résultats amènent aux conclusions suivantes :

- Selon (3) le « présent », *i.e.* $x(0)$, est vu en (1) avec une probabilité unitaire ;

- Par (4), la totalité du « passé/futur », constitué des échantillons $x(t), x(t-h), x(t-2h), \cdots$, est également saisie avec une probabilité d'un, mais chaque échantillon de $x(t)$ est pondéré de la probabilité $-\gamma(\alpha, k)$, qui est d'autant plus élevée que l'on est proche du « présent ».

Cela permet de conclure que $-\sum_{k=1}^{\infty} \gamma(\alpha, k)x(t-kh)$ peut être considéré comme la valeur attendue d'une variable aléatoire, tel que $P[x(t-kh)] = -\gamma(\alpha, k), k = 1, 2, \cdots, 0 \leq \alpha \leq 1$.

La Figure 1 montre l'interprétation géométrique de l'équation (1) selon un point de vue de la théorie des probabilités.

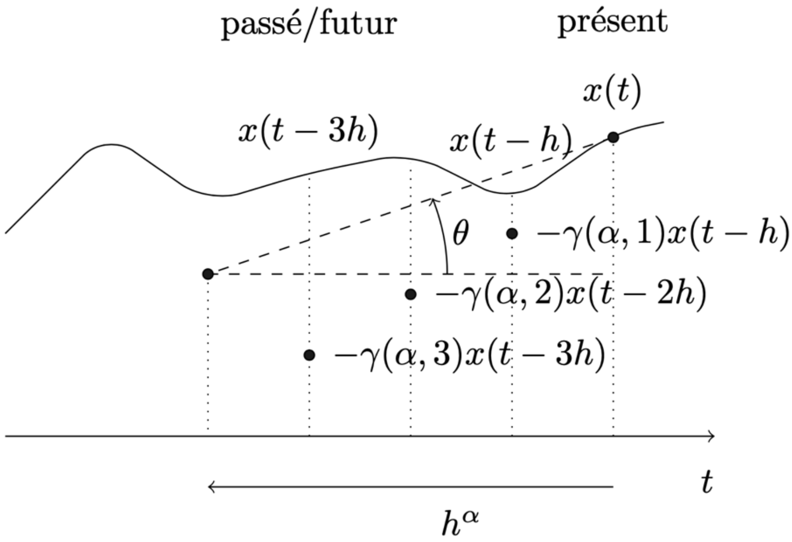

Figure 1. *Interprétation probabiliste et géométrique de la définition de Grünwald-Letnikov de la dérivée fractionnaire d'ordre α de x(t)*

La définition de Grünwald-Letnikov (1) permet d'obtenir la pente, θ, d'un triangle composé de $x(t)$ et de $-\sum_{k=1}^{\infty} \gamma(\alpha, k)x(t-kh)$, avec une distance horizontale de $t = h^\alpha$, et une distance verticale qui est la différence entre l'échantillon actuel du signal x, le « présent », et la moyenne arithmétique du « passé / futur ». Tant que l'incrément $h \to 0$, la pente $\theta \to D^\alpha[x(t)]$. Par conséquent, le cas particulier de $\alpha = 1$ correspond à la pente d'une ligne tangente, parce que les échantillons $x(t)$ et $x(t-h)$ ont une probabilité d'un, tandis que le reste du « passé / futur » a une probabilité de zéro. En d'autres termes, la dérivée du premier ordre correspond à une perspective déterministe et n'est qu'une situation limite du cas plus général d'une valeur fractionnaire de α.

Ainsi, on note l'importance de l'analyse de l'amplitude de la distribution de probabilité qui capture et pondère le « passé / futur » pour obtenir la valeur attendue. Si l'on considère $|\gamma(\alpha k)|$ comme fonction de k pour plusieurs valeurs de α, et on fait $k \to +\infty$, on vérifie que l'approximation asymptotique est proportionnelle à $|\gamma(\alpha, k)| \to \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\pi} |sin(\alpha\pi)|\, k^{-\alpha-1}$, montrant une mémoire de type logarithmique et, aussi, l'importance que la dérivée fractionnaire donne aux valeurs d'échantillon passées et futures de $x(t)$, contrairement au cas de l'ordre entier. D'autre part, le facteur h au dénominateur de l'expression (1) signifie que, pour de grandes valeurs de h (c'est-à-dire, très loin dans le « passé / futur »), nous avons une variation lente, alors que pour de petites valeurs de h (c'est-à-dire, près du « présent ») nous avons une variation rapide, cet effet étant d'autant plus fort que la valeur de α est proche de zéro. Cela signifie que nous n'avons une vitesse uniforme dans le calcul de la définition (1) que dans le cas de $\alpha = 1$. Les mêmes conclusions peuvent être soutenues par la moyenne arithmétique et la variance de la distribution de probabilité, à savoir $\mu_X = 2^{\alpha-1}$ et $V_X = \alpha(1 + \alpha - \alpha 2^\alpha)2^{\alpha-2}$, respectivement.

3. Information généralisée d'ordre fractionnaire

En 2014, Tenreiro Machado présente [MAC 14] une nouvelle formulation du concept d’entropie en prenant pour base les opérateurs fractionnaires et l’entropie de Shannon, développée en 1948 par Claude Shannon dans le cadre de la théorie de l'information. Ainsi, sont présentées l’entropie de Shannon et l’entropie de Ubriaco, dont la première est

$$S = E(-ln\, p) = \sum_i (-ln\, p_i)\ p_i \tag{5}$$

où S est la valeur attendue, $E(\cdot)$, de l’information, $I(p_i) = -\ln p_i$. L'expression (5) obéit aux quatre axiomes de Khinchin. L’entropie de Ubriaco réuni la théorie de l'information et le CF :

$$S_q = E[(-ln\, p)^q] = \sum_i (-ln\, p_i)^q\ p_i \tag{6}$$

où $0 \leq q \leq 1$ désigne l'ordre, de sorte que $q = 1$ donne l'expression (5). Dans ce cas les axiomes de Khinchin sont respectés, à l'exception de l'axiome d'additivité. L’information est, maintenant, $I_q(p_i) = (-ln\, p_i)^q$.

Dans le CF, on adopte une fonction puissance pour obtenir des valeurs intermédiaires, *i.e.* pour "fractionner" des opérateurs entiers classiques, dont la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire d'ordre $\alpha \in \mathbb{R}$ d'un signal $x(t)$ est donnée par :

$$\mathcal{L}\{D^\alpha x(t)\} = s^\alpha \mathcal{L}\{x(t)\} \tag{7}$$

où t désigne le temps, $\mathcal{L}\{\cdot\}$ et s désignent, respectivement, l'opérateur et la variable de Laplace [ORT 20].

Cette propriété a motivé l'approximation des dérivées fractionnaires en développant le facteur s^α soit avec la transformée de Fourier, soit avec la transformée en Z.

Cependant, l'adoption au moyen d'une fonction puissance est liée aux transformées et on peut concevoir une approche fractionnaire distincte pour l'information et l'entropie. En fait, on peut considérer l'information de Shannon $I(p_i) = -\ln p_i$ entre les cas $D^{-1}I(p_i) = p_i(1 - \ln p_i)$ et $D^1 I(p_i) = -\frac{1}{p_i}$, ce qui, dans la perspective du CF, conduit à proposer une information et une entropie d'ordre $\alpha \in \mathbb{R}$ donnée par :

$$I_\alpha(p_i) = D^\alpha I(p_i) = -\frac{p_i^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}[\ln p_i + \psi(1) - \psi(1-\alpha)] \tag{8}$$

$$S_\alpha = \sum_i \left\{-\frac{p_i^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\ [\ln p_i + \psi(1) - \psi(1-\alpha)]\right\} p_i \tag{9}$$

oú $\Gamma(\cdot)$ et $\psi(\cdot)$ désignent, respectivement, les fonctions gamma et digamma. L'expression (9) n'obéit pas à certains des axiomes de Khinchin, à l'exception du cas $\alpha = 0$, qui conduit à l'entropie de Shannon. Ce comportement est, d’ailleurs, conforme au CF où les dérivées fractionnaires n'obéissent pas à certaines des propriétés des opérateurs d'ordre entier. Dans les deux cas, en généralisant les opérateurs, nous perdons certaines propriétés classiques.

Ce travail présente la comparaison des informations $I_q versus\ (q,p)$, pour $0 \leq q \leq 1$, et $I_\alpha\ versus\ (\alpha,p)$, pour $-1 \leq \alpha \leq 1$. On peut observer que I_p a une excursion d'amplitude plus petite que I_α. En outre, on vérifie que I_p prend des valeurs positives, mais aussi des valeurs négatives pour $\alpha > 0$. Par conséquent, l'expression (8) suppose également l'hypothèse que nous pouvons avoir des informations négatives qui, pour une valeur donnée de $\alpha > 0$, peuvent être interprétées, dans les mots de Tenreiro Machado, comme dérivées d'*événements trompeurs*. L'auteur établit ici un lien entre *événements trompeurs* et les probabilités. En résumé, on peut dire que le paramètre α permet d'ajuster le niveau de confiance de l'information, qui varie de l'information positive, c'est-à-dire digne de confiance, à l'information négative, c'est-à-dire trompeuse.

Afin d'illustrer le comportement du nouvel indice l'auteur compare les deux approches, les entropies S_q et S_α, pour les distributions de probabilité uniforme, de Poisson $(\alpha = 2)$, géométrique $(p = 0{,}3)$, binomiale $(p = 0{,}3)$ et de Benford :

- S_q présente une variation beaucoup plus faible avec q que S_α avec α,
- La forme des courbes pour $0 < q \leq 1$ ressemble à celles de $-0{,}5 < \alpha \leq 0$, ce qui est naturel, étant donné que les deux entropies tendent vers l'entropie de Shannon lorsque $q \to 1$ et $\alpha \to 0$, respectivement,
- S_α prend des valeurs maximales pour $0{,}07 < \alpha < 0{,}23$ et des valeurs nulles pour $0{,}62 < \alpha < 0{,}68$. Cela peut suggérer, dans une application pratique, l'adoption des valeurs de α dans le premier intervalle, si les informations sont fiables, ou des valeurs de α dans le deuxième intervalle, si les données contiennent des informations trompeuses.

L'évolution d'une distribution binaire conduit aux expressions suivantes :

$$S_q^{bin} = p(-\ln p)^q + (1-p)[-ln(1-p)]^q \tag{10}$$

$$S_\alpha^{bin} = p\left\{-\frac{p^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}[ln(p) + \psi(1) - \psi(1-\alpha)]\right\} + (1-p)\left\{-\frac{(1-p)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}[ln(1-p) + \psi(1) - \psi(1-\alpha)]\right\} \tag{11}$$

Les deux présentent une variation symétrique par rapport à $p = 0{,}5$. De nouveau S_q est moins sensible à p que S_α.

Dans une deuxième phase, S_q et S_α ont été appliqués à plusieurs types de données, notamment de nature mathématique, financière et biologique. Il a été vérifié que l'entropie S_α conduit à une plus grande sensibilité lors de l'évolution du signal, ce qui est utile pour décrire la dynamique des systèmes complexes. En outre, la généralisation proposée intègre le concept d'informations positives et négatives, c'est-à-dire des données soit fiables, soit trompeuses, ce qui permet d'étendre l'entropie.

4. Remarques finales

Une vue d'ensemble des premiers travaux de Tenreiro Machado sur le Calcul Fractionnaire est présentée. Les publications sur les contrôleurs d'ordre fractionnaire, l'étude de systèmes dynamiques mènent à une caractérisation probabiliste de la dérivée d'ordre fractionnaire. Parmi les publications qui citent ce travail, on peut souligner [SAB 22] qu'étend et illustre l'interprétation probabiliste de l'opérateur dérivé fractionnaire et propose des interprétations pour d'autres modèles fractionnaires et, plus généralement, des comportements fractionnaires, sans utiliser de modèle. L'utilisation du concept d'entropie est un prolongement naturel des applications du CF et mène à la définition d'une nouvelle entropie. Cette entropie est référée dans la littérature scientifique comme entropie de Machado [IBA15].

Bibliographie

[MAC 97] MACHADO J.A.T., « Analysis and Design of Fractional-Order Digital Control Systems », *Systems Analysis Modelling Simulation*, nº 27, p. 107-122, 1997.

[MAC 01] MACHADO J.A.T., « Discret-time fractional-order controllers », *Fractional Calculus and Applied Analysis*, n° 4, p. 47-66, 2001.

[MAC 10a] MACHADO J.A.T., « Optimal tuning of fractional controllers using genetic algorithms », *Nonlinear Dynamics*, n° 62, 1, p. 447-452, 2010.

[MAC 13a] MACHADO J.A.T., « Optimal Controllers with Complex Order Derivatives », *Journal of Optimization Theory and Applications,* n° 156, 1, p. 2-12, 2013.

[DUA 02] DUARTE F.M.B., MACHADO J.A.T., « Chaotic Phenomena and Fractional-Order Dynamics in the Trajectory Control of Redundant Manipulatorsl », *Nonlinear Dynamics,* n° 29, p. 315-342, 2002.

[FER 05] FERREIRA N.M.F., MACHADO J.A.T., CUNHA J.B., « Fractional-Order Position/Force Robot Control », *Journal of Advanced Computational Intelligence and Intelligent Informatics,* n° 9, 4, p. 379-385, 2005.

[MAC 20] MACHADO J.A.T., LOPES A.M., « Fractional-order kinematic analysis of biomechanical inspired manipulators », *Journal of Vibration and Control,* n° 26, 1-2, p. 102-111, 2020.

[MAC 11a] MACHADO J.A.T., « Fractional dynamics of a system with particles subjected to impacts », *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation,* n° 16, 12, p. 4596-4601, 2011.

[MAC 12a] MACHADO J.A.T., « Multidimensional scaling analysis of fractional systems », *Computers & Mathematics with Applications,* n° 64, 10, p. 2966-2972, 2012.

[MAC 13b] MACHADO J.A.T., « Fractional dynamics of genetic algorithms using hexagonal space tessellation », *Abstract and Applied Analysis*, Article ID 739464, 7 pages, 2013.

[MAC 21] MACHADO J.A.T., « The Bouncing Ball and the Grünwald-Letnikov Definition of Fractional Derivative », *Fractional Calculus and Applied Analysis,* nº 24, p. 1003–1014, 2021.

[MAC 03] MACHADO J.A.T., « A Probabilistic Interpretation of the Fractional-Order Differentiation », *Fractional Calculus and Applied Analysis*, n° 6, 1, p. 73-80, 2003.

[MAC 09] MACHADO J.A.T., « Fractional derivatives : Probability interpretation and frequency response of rational approximations », *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation,* n° 14, 9-10, p. 3492-3497, 2009.

[MAC 13c] MACHADO J.A.T., « Fractional Coins and Fractional Derivatives », *Abstract and Applied Analysis*, Article ID 205097, 5 pages, 2013.

[MAC 10b] MACHADO J.A.T., « Entropy analysis of integer and fractional dynamics », *Nonlinear Dynamics,* n° 62, 1, p. 371-378, 2010.

[MAC 11b] MACHADO J.A.T., COSTA A.C., QUELHAS M.D., « Shannon, Rényie and Tsallis entropy analysis of DNA using phase plane », *Nonlinear Analysis: Real World Applications,* n° 12, 6, p. 3135-3144, 2011.

[MAC 12b] MACHADO J.A.T., « Shannon Entropy Analysis of the Genome Code », *Mathematical Problems in Engineering*, Article ID 132625, 12 pages, 2012.

[MAC 12c] MACHADO J.A.T., « Entropy Analysis of Fractional Derivatives and Their Approximation », *Journal of Applied Nonlinear Dynamics*, n° 1, 1, p. 109-112, 2012.

[MAC 12d] MACHADO J.A.T., « Shannon Information and Power Law Analysis of the Chromosome Code », *Abstract and Applied Analysis*, Article ID 439089, 13 pages, 2012.

[MAC 13d] MACHADO J.A.T., « Complex evolution of a multi-particle system », *Applied Mathematical Modelling*, n° 37, 1, p. 9203–9214, 2013.

[MAC 14] MACHADO J.A.T., « Fractional order generalized Information », *Entropy*, n° 16, 1, p. 2350-2361, 2014.

[ORT 20] ORTIGUEIRA M.D., MACHADO J.A.T., « Revisiting the 1D and 2D Laplace Transforms », *Mathematics*, n° 8, 8, p. 1330, 2020.

[SAB 22] SABATIER J., « Probabilistic Interpretations of Fractional Operators and Fractional Behaviours : Extensions, Applications and Tribute to Prof. José Tenreiro Machado’s Ideas », Mathematics, nº 10(22), 4184, 2022.

[IBA 15] IBRAHIM R.W., MOGHADDASI Z., MOGHADDASI H.A., NOOR R.M., « Fractional Differential Texture Descriptors Based on the Machado Entropy for Image Splicing Detection », Entropy, nº 17, 4775-4785, 2015.