

Les sinueux chemins de l'entropie

The winding path to entropy

Constantino Tsallis^{1 2 3}

¹ Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas et Instituto Nacional de Ciência e Tecnologia de Sistemas Complexos, Rua Xavier Sigaud 150, Rio de Janeiro-RJ, 22290-180, Brasil ; tsallis@cbpf.br

² Santa Fe Institute, 1399 Hyde Park Road, Santa Fe, New Mexico 87501, USA

³ Complexity Science Hub Vienna, Josefstädter Strasse 39, 1080 Vienna, Austria

RÉSUMÉ. Le concept d'entropie a parcouru un long chemin depuis qu'il a été introduit en 1865 par Clausius comme une pièce clef pour compléter la thermodynamique et sa structure de transformations de Legendre. Boltzmann, suivi par Gibbs, a ensuite dévoilé son interprétation microscopique, donnant lieu à l'expression additive $S_{BG} = k \sum_{i=1}^W p_i \ln(1/p_i)$. Quelques décades plus tard von Neumann lui a donné sa forme quantique, et Shannon l'a reliée à la théorie des communications. Quelque temps après, en 1961, Rényi a généralisé la forme de Boltzmann-Gibbs-von Neumann-Shannon *tout en préservant son additivité*. Il y a eu par la suite une véritable explosion de fonctionnelles entropiques *non additives*, environ cinquante aujourd'hui. Avec les multifractals comme inspiration, nous avons postulé en 1988 la forme $S_q \equiv k \sum_{i=1}^W p_i \ln_q(1/p_i)$ [avec $\ln_q z \equiv (z^{1-q} - 1)/(1 - q)$; $\ln_1 z = \ln z$] comme base pour généraliser la mécanique statistique de Boltzmann-Gibbs elle-même. Au long de cette brève perspective, nous présentons les fondements et principales applications de cette théorie, désigné couramment sous le nom de *mécanique statistique non extensive*.

ABSTRACT. The concept of entropy has traveled along winding roads since it was introduced in 1865 by Clausius as a key piece to complete thermodynamics and its Legendre transforms structure. Boltzmann, followed by Gibbs, has then revealed its microscopic interpretation, thus leading to the additive expression $S_{BG} = k \sum_{i=1}^W p_i \ln(1/p_i)$. A few decades later von Neumann provided its quantum form, and Shannon connected it to the theory of communications. Some time later, in 1961, Rényi generalized the Boltzmann-Gibbs-von Neumann-Shannon form, *though preserving its additivity*. There was then a real explosion of *nonadditive* entropic functionals, close to fifty nowadays. Inspired by multifractals, we postulated in 1988 the form $S_q \equiv k \sum_{i=1}^W p_i \ln_q(1/p_i)$ [with $\ln_q z \equiv (z^{1-q} - 1)/(1 - q)$; $\ln_1 z = \ln z$] as a basis for generalizing the Boltzmann-Gibbs statistical mechanics itself. Along the present brief perspective, we present the foundations and main applications of this theory, currently referred to as *nonextensive statistical mechanics*.

MOTS-CLÉS. Thermodynamique, entropie non additive, mécanique statistique non extensive, seuil du chaos, interactions de longue portée, fractals

KEYWORDS. Thermodynamics, nonadditive entropy, nonextensive statistical mechanics, edge of chaos, long-range interactions, fractals

1. Introduction

L'entropie S a été introduite en 1865 par Clausius (CLAUSIUS 1865) dans le but de remplacer un transfert différentiel δQ de chaleur reçu par le système par une différentielle totale exacte $dS = \delta Q/T$, où la température T a le rôle de facteur intégrant. En ce faisant, Clausius a complété la structure mathématique de la thermodynamique, soit celle des transformées de Legendre. En effet, la variation d'entropie entre un état initial du système et son état final ne dépend pas du chemin parcouru, alors que la chaleur fournie dépend non seulement des états initial et final mais aussi du chemin spécifique au long duquel la chaleur a été fournie. L'axiomatisation mathématique de la thermodynamique est arrivée en fait bien plus tard par les mains de Carathéodory (CARATHÉODORY 1909).

Mais dans ce petit essai nous voulons plutôt focaliser la connexion – établie quelques années plus tard par Boltzmann (BOLTZMANN 1872, BOLTZMANN 1877) et par Gibbs (GIBBS 1902) – de l'entropie macroscopique S avec le monde microscopique. Au temps de Boltzmann et Gibbs la description microscopique d'un système physique était faite avec des variables continues (positions et moments de toutes les particules), mais nous allons nous reporter ici à des variables discrètes puisqu'elles sont plus trans-

parentes et adaptées à la réalité quantique. L'expression de l'entropie de Boltzmann-Gibbs (BG) lorsque les W configurations microscopiques possibles sont également probables est donnée par

$$S_{BG} = k \ln W, \quad (1)$$

où k est une constante conventionnelle positive choisie une fois pour toutes (en physique k représente normalement la constante de Boltzmann). Lorsque les diverses possibilités ne sont pas également probables, l'expression (1) est généralisée de la façon suivante :

$$S_{BG}(\{p_i\}) = -k \sum_{i=1}^W p_i \ln p_i \quad \left(\sum_{i=1}^W p_i = 1 \right), \quad (2)$$

où $\{p_i\}$ sont les probabilités associées aux W possibilités. On peut écrire de façon alternative, soit

$$S_{BG}(\{p_i\}) = k \sum_{i=1}^W p_i \sigma_i \equiv k \langle \sigma_i \rangle, \quad (3)$$

où

$$\sigma_i \equiv \ln \frac{1}{p_i} \quad (4)$$

est la *surprise* (WATANABE 1969, BARLOW 1990), qui varie de façon monotone entre zéro et infini lorsque p_i varie de un à zéro.

Une fonctionnelle entropique $S(\{p_i\})$ est *additive* (PENROSE 1970) si, pour deux systèmes *probabilistiquement indépendants* A et B (c'est à dire $p_{ij}^{A+B} = p_i^A p_j^B$; $i = 1, 2, \dots, W_A$; $j = 1, 2, \dots, W_B$),

$$S(A + B) = S(A) + S(B), \quad (5)$$

où $S(A + B) \equiv S(\{p_{ij}^{A+B}\})$, $S(A) \equiv S(\{p_i^A\})$ et $S(B) \equiv S(\{p_j^B\})$. Il s'ensuit immédiatement que $S_{BG}(\{p_i\})$ est *additive*.

En plus, $S_{BG}(\{p_i\})$ est *concave*, c'est à dire $S_{BG}(\{\lambda p_i + (1-\lambda)p'_i\}) \geq \lambda S_{BG}(\{p_i\}) + (1-\lambda)S_{BG}(\{p'_i\})$, avec $\sum_{i=1}^W p_i = \sum_{i=1}^W p'_i = 1$ et $\lambda \in (0, 1)$. Enfin, elle est aussi *expansible*, c'est à dire $S_{BG}(p_1, p_2, \dots, p_W, 0) = S_{BG}(p_1, p_2, \dots, p_W)$, et elle s'annule lorsque l'une des $\{p_i\}$ est égale à l'unité, toutes les autres étant (nécessairement) nulles.

Dans la ligne de Boltzmann et Gibbs, von Neumann (von NEUMANN 1927) a introduit la forme quantique de S_{BG} , soit

$$S_{BG} = -k \text{Tr} \rho \ln \rho \quad (\text{Tr} \rho = 1), \quad (6)$$

ρ étant la matrice densité. Et quelques années plus tard Shannon (SHANNON 1948) l'a réinterprétée dans le cadre de la théorie des communications. Par la suite, dans le cadre de la théorie de l'information, Renyi (BALATONI et RENYI 1956, RENYI 1959, RENYI 1961, RENYI 1970) a généralisé S_{BG} toute en préservant son additivité :

$$S_q^R \equiv k \frac{\ln \sum_{i=1}^W p_i^q}{1-q} \quad (q \in \mathbb{R}; S_1^R = S_{BG}), \quad (7)$$

Cette forme est concave pour $0 < q \leq 1$, convexe pour $q < 0$, et ni l'un ni l'autre pour $q > 1$.

2. Thermodynamique et transformées de Legendre

2.1. Interactions de courte portée

Considérons, à titre d'exemple, un système fluide homogène, magnétique, constitué par N éléments dont les interactions sont de courte portée, en équilibre thermodynamique. Son énergie libre de Gibbs est donnée par

$$G(N, T, p, \mu, H, \dots) = U(N, T, p, \mu, H, \dots) - TS(N, T, p, \mu, H, \dots) + pV - \mu N - HM(N, T, p, \mu, H, \dots) - \dots, \quad (1)$$

donc

$$\frac{G(N, T, p, \mu, H, \dots)}{N} = \frac{U(N, T, p, \mu, H, \dots)}{N} - T \frac{S(N, T, p, \mu, H, \dots)}{N} + p \frac{V}{N} - \mu - H \frac{M(N, T, p, \mu, H, \dots)}{N} - \dots. \quad (2)$$

En prenant la limite thermodynamique $N \rightarrow \infty$ nous obtenons

$$g(T, p, \mu, H, \dots) = u(T, p, \mu, H, \dots) - Ts(T, p, \mu, H, \dots) + pv - \mu - Hm(T, p, \mu, H, \dots) - \dots, \quad (3)$$

où $g \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{G}{N}$, $u \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{U}{N}$, $s \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{S}{N}$, $v \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{V}{N}$ et $m \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{M}{N}$. Cette relation ne garde pas mémoire des détails des interactions vu qu'elles sont de courte portée, et les variables thermodynamiques appartiennent à deux classes, soient *extensives* (G, U, S, V, N, M) ou *intensives* ($T, p, \mu, H; g, u, s, v, m$). Il en va bien autrement lorsque les interactions sont de longue portée !

2.2. Interactions de longue portée

À titre d'illustration, focalisons un système classique constituée par N particules qui deux-à-deux interagissent de façon attractive à travers d'une énergie potentielle $\Phi = -A/r^\alpha$ ($A > 0$, $\alpha \geq 0$, $r \geq 1$), où r est la distance (adimensionnée) qui les sépare.

Si on les supposent libres dans l'espace entier, l'énergie potentielle U_{pot} par particule dans la limite de température nulle est donnée par

$$\frac{U_{pot}}{N} \propto -A \int_1^\infty dr r^{d-1} \frac{1}{r^\alpha} = -\frac{A}{\alpha - d} \quad (4)$$

si $\alpha > d$, et diverge pour $0 \leq \alpha \leq d$.

Si, par contre, on les suppose distribuées de façon homogène dans l'espace, l'énergie potentielle U_{pot} par particule à température nulle est donnée par

$$\frac{U_{pot}}{N} \propto -A \int_1^{N^{1/d}} dr r^{d-1} \frac{1}{r^\alpha} = -\frac{A}{d} N^*, \quad (5)$$

où

$$N^* \equiv \frac{N^{1-\alpha/d} - 1}{1 - \alpha/d} = \ln_{\alpha/d} N \sim \begin{cases} \frac{1}{\alpha/d - 1} & \text{if } \alpha/d > 1; \\ \ln N & \text{if } \alpha/d = 1; \\ \frac{N^{1-\alpha/d}}{1 - \alpha/d} & \text{if } 0 \leq \alpha/d < 1. \end{cases} \quad (6)$$

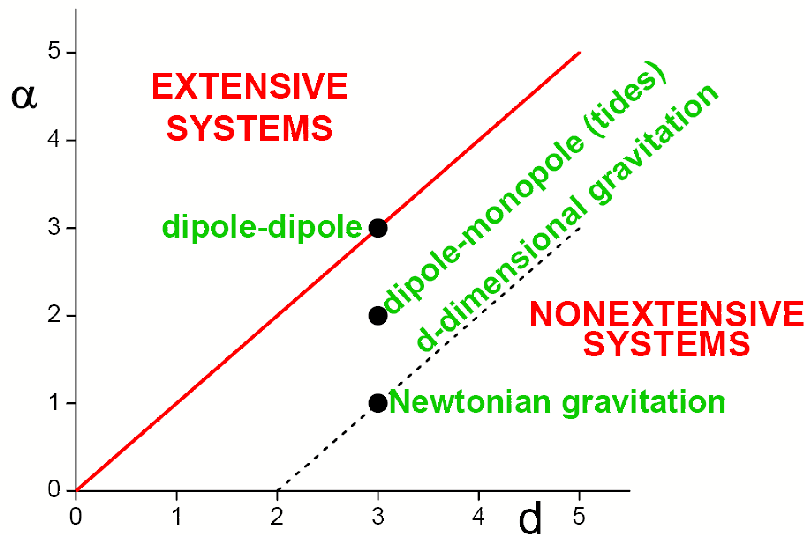


Figure 1.: Ceux qu'on appelle *systèmes extensifs* ($\alpha/d > 1$ lorsqu'ils sont classiques) correspondent à une énergie totale extensive (dans le sens de la thermodynamique), typiquement associée à des *séries absolument convergentes*, alors que ceux qu'on appelle *systèmes non extensifs* ($0 \leq \alpha/d \leq 1$ lorsqu'ils sont classiques) correspondent à une énergie totale super-extensive (dans le sens de la thermodynamique, c'est à dire qui croît plus rapidement que N), typiquement associée à des *séries divergentes*. Les systèmes marginaux ($\alpha/d = 1$ ici) sont typiquement associées à des *séries conditionnellement convergentes*, qui dépendent donc des conditions de contour, c'est à dire typiquement de la forme extérieure du système (par exemple, planaire, cylindrique, sphérique). Les condensateurs constituent un exemple notoire du cas $\alpha/d = 1$. Le gas standard de Lennard-Jones est localisé sur $(d, \alpha) = (3, 6)$, appartenant donc à la classe des systèmes extensifs. (Source : TSALLIS 2022).

Nous voyons donc que N^* est finie dans tous les cas. Ces expressions impliquent que $\alpha/d > 1$ correspond à courte portée (donc extensivité de U) alors que $0 \leq \alpha/d \leq 1$ correspond à longue portée (donc super-extensivité de U) : voir Figure 1.

Par extension, on généralise l'Eq. (2) de la façon suivante :

$$\frac{G(N, T, p, \mu, H, \dots)}{N^* N} = \frac{U(N, T, p, \mu, H, \dots)}{N^* N} - \frac{T}{N^*} \frac{S(N, T, p, \mu, H, \dots)}{N}$$

$$+ \frac{p}{N^*} \frac{V}{N} - \frac{\mu}{N^*} - \frac{H}{N^*} \frac{M(N, T, p, \mu, H, \dots)}{N} - \dots \quad (7)$$

En prenant la limite thermodynamique $N \rightarrow \infty$ nous obtenons des *valeurs finies pour toutes les variables thermodynamiques*, donc

$$g(T^*, p^*, \mu^*, H^*) = u(T^*, p^*, \mu^*, H^*) - T^* s(T^*, p^*, \mu^*, H^*) + p^* v(T^*, p^*, \mu^*, H^*) - \mu^* - H^* m(T^*, p^*, \mu^*, H^*), \quad (8)$$

où les définitions de T^* et de toutes les autres variables sont explicites (par exemple, $T^* \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} [T/N^*]$ et $s(T^*, p^*, \mu^*, H^*) \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} [S(N, T, p, \mu, H)/N]$). Autrement dit, pour avoir des équations d'état thermodynamique *finies*, nous devons les écrire de façon générale comme fonctions des variables (T^*, p^*, μ^*, H^*) . Si $\alpha/d > 1$, ce procédé recupère les equations d'état usuelles, ainsi que les variables thermodynamiques *extensives* (G, U, S, V, N, M) et *intensives* (T, p, μ, H) usuelles. Mais, si $0 \leq \alpha/d \leq 1$, la situation est plus complexe et, à la place de *deux*, trois *classes* thermodynamiques émergent. Nous pouvons les appeler variables *extensives* (S, V, N, M), *pseudo-extensives* (G, U) (super-extensives dans le cas présent) et *pseudo-intensives* (T, p, μ, H) (super-intensives dans le cas présent). Toutes les variables du type énergie (G, F, U), F étant l'énergie libre de Helmholtz, donnent lieu à des variables pseudo-extensives, alors que celles qui apparaissent comme des paires dans la structure thermodynamique de Legendre donnent lieu à des variables pseudo-intensives (T, p, μ, H) et extensives (S, V, N, M). C'est à remarquer que (S, V, N, M) *sont toujours extensives* ! Voir Figure 2. L'exactitude de toutes ces échelles a été vérifiée de façon répétée dans la littérature pour des systèmes physiques concrets, tels que fluides, substances magnétiques, polymères, percolation (voir TSALLIS 2009 et des références incluses).

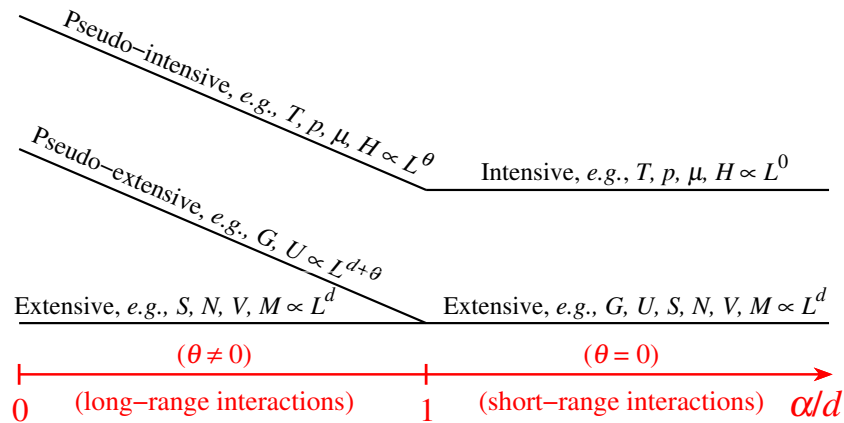


Figure 2.: Représentation des différents régimes d'échelle pour des systèmes classiques d -dimensionnelles. Pour des interactions attractives de longue portée ($0 \leq \alpha/d \leq 1$; par exemple, la gravitation Newtonienne correspond à $(d, \alpha) = (3, 1)$) nous pouvons distinguer *trois* classes de variables thermodynamiques, soient celles proportionnelles à L^θ , appelées *pseudo-intensives* (L étant une longueur linéaire caractéristique ; θ dépend de la classe physique à laquelle appartient le système), celles proportionnelles à $L^{d+\theta}$ avec $\theta = d - \alpha$, appeées *pseudo-extensives* (les énergies), et celles proportionnelles à L^d (toujours extensives). Pour les interactions attractives de courte portée ($\alpha > d$) nous avons $\theta = 0$ et les énergies recupèrent la proportionalité standard, soit avec L^d , étant ainsi dans la même classe que S, N, V, M , etc, alors que les précédentes variables pseudo-intensives deviennent réellement intensives (indépendantes de L) ; c'est cette région qui a seulement deux classes de variables thermodynamiques, et qui est (de façon tacite) indiquée normalement dans les livres de texte traditionnels. Pour davantage de détails voir TSALLIS 2009, TSALLIS et CIRTO 2013, TSALLIS et CIRTO 2014, TSALLIS 2016, TSALLIS 2019, TSALLIS 2022.

3. Entropies non additives

Inspiré par les fractals/multifractals (MANDELBROT 1983, HENTSCHEL and PROCACCIA 1983, LE MEHAUTÉ 1984, HALSLEY et al 1986, PALADIN et VULPIANI 1987), nous avons proposé (TSALLIS 1988) la généralisation de la mécanique statistique de BG sur la base de l'entropie *nonadditive*

$$S_q \equiv k \frac{1 - \sum_i p_i^q}{q - 1} \quad (q \in \mathbb{R}; S_1 = S_{BG}). \quad (1)$$

Comme nous verrons par la suite, cette entropie est intimement liée avec le cadre thermodynamique généralisé que nous venons de décrire. L'expression (1) peut être ainsi ré-écrite :

$$S_q \equiv k \sum_{i=1}^W p_i \ln_q \frac{1}{p_i} = -k \sum_{i=1}^W p_i^q \ln_q p_i = -k \sum_{i=1}^W p_i \ln_{2-q} p_i, \quad (2)$$

où

$$\ln_q z \equiv \frac{z^{1-q} - 1}{1 - q} \quad (\ln_1 = \ln z). \quad (3)$$

Son inverse est donnée par

$$e_q^z \equiv [1 + (1 - q)z]_+^{\frac{1}{1-q}} \quad (e_1^z = e^z), \quad (4)$$

où $[(\dots)]_+ = (\dots)$ si $(\dots) > 0$, et zéro autrement.

Si A et B sont deux systèmes probabilistes indépendants, nous vérifions immédiatement que

$$\frac{S_q(A + B)}{k} = \frac{S_q(A)}{k} + \frac{S_q(B)}{k} + (1 - q) \frac{S_q(A)}{k} \frac{S_q(B)}{k}, \quad (5)$$

donc

$$S_q(A + B) = S_q(A) + S_q(B) + \frac{1 - q}{k} S_q(A) S_q(B). \quad (6)$$

Nous voyons que, sauf si $(1 - q)/k = 0$, S_q est nonadditive. Elle est concave (convexe) si $q > 0$ ($q < 0$), expansible pour $q > 0$, et elle s'annule lorsque l'une des $\{p_i\}$ est égale à l'unité, toutes les autres étant (nécessairement) nulles. Finalement, elle est liée avec l'entropie de Renyi à travers de la fonction monotone croissante suivante :

$$\frac{S_q^R}{k} = \frac{\ln[1 + (1 - q)S_q/k]}{1 - q}. \quad (7)$$

Nous focalisons maintenant l'importante connexion de S_q avec l'Eq. (8), qui implique en particulier que l'entropie thermodynamique doit toujours être *extensive*, c'est à dire que $0 < \lim_{N \rightarrow \infty} S(N)/N < \infty$. Supposons, par simplicité, que notre système probabiliste a toutes ces probabilités égales et non nulles, c'est à dire que $p_i = 1/W$ ($\forall i$) pour tous les états microscopiques admissibles. Nous illustrons la différence cruciale entre additive et extensive à travers les quatre cas typiques suivants dans la limite $N \rightarrow \infty$:

— Classe exponentielle $W(N) \sim A\mu^N$ ($A > 0; \mu > 1$) :

C'est le cas typique dans la théorie de BG. Nous avons $S_{BG}(N) = k \ln W(N) \sim N \ln \mu + \ln A \propto N$, donc S_{BG} est extensive, comme thermodynamiquement requis.

- Classe en loi de puissance $W(N) \sim BN^\rho$ ($B > 0$; $\rho > 0$) :
Nous ne devons pas utiliser S_{BG} puisqu'elle implique $S_{BG}(N) = k \ln W(N) \sim \rho \ln N + \ln B \propto \ln N$, violant donc la thermodynamique. Nous vérifions par contre que $S_{q=1-1/\rho}(N) = k \ln_{q=1-1/\rho} W(N) \propto N$, comme thermodynamiquement requis.
- Classe exponentielle étirée $W(N) \sim C\nu^{N^\gamma}$ ($C > 0$; $\nu > 1$; $0 < \gamma < 1$) :
Dans ce cas, aucune valeur de q existe qui pourrait fournir une entropie S_q extensive. Nous pouvons par contre utiliser une autre fonctionnelle entropique non additive, soit $S_\delta \equiv k \sum_{i=1}^W p_i [\ln 1/p_i]^\delta$ (TSALLIS 2009) avec $\delta = 1/\gamma$. En effet, $S_{\delta=1/\gamma}(N) = k [\ln W(N)]^{1/\gamma} \propto N$, comme thermodynamiquement requis.
- Classe logarithmique $W(N) \sim D \ln N$ ($D > 0$) :
Dans ce cas, il n'y a pas de valeurs (q, δ) qui pourraient fournir une entropie $S_{q,\delta} \equiv k \sum_i p_i [\ln_q(1/p_i)]^\delta$ extensive (TSALLIS et CIRTO 2013). Par contre, nous pouvons utiliser l'entropie de Curado (voir TSALLIS 2022) $S_\lambda^C(N) = k [e^{\lambda W(N)} - e^\lambda]$ avec $\lambda = 1/D$. En effet, nous vérifions que $S_{\lambda=1/D}^C(N) \propto N$, comme thermodynamiquement requis.

Ces quatre classes paradigmatiques sont indiquées dans la Figure 3.

SYSTEMS $W(N)$ (equiprobable)	ENTROPY S_{BG} (ADDITIVE)	ENTROPY S_q ($q \neq 1$) (NONADDITIVE)	ENTROPY S_δ ($\delta \neq 1$) (NONADDITIVE)	ENTROPY S_λ^C ($\lambda > 0$) (NONADDITIVE)
$\sim A \mu^N$ ($A > 0, \mu > 1$)	EXTENSIVE	NONEXTENSIVE	NONEXTENSIVE	NONEXTENSIVE
$\sim B N^\rho$ ($B > 0, \rho > 0$)	NONEXTENSIVE	EXTENSIVE ($q = 1 - 1/\rho$)	NONEXTENSIVE	NONEXTENSIVE
$\sim C \nu^{N^\gamma}$ ($C > 0, \nu > 1, 0 < \gamma < 1$)	NONEXTENSIVE	NONEXTENSIVE	EXTENSIVE ($\delta = 1/\gamma$)	NONEXTENSIVE
$\sim D \ln N$ ($D > 0$)	NONEXTENSIVE	NONEXTENSIVE	NONEXTENSIVE	EXTENSIVE ($\lambda = 1/D$)

Figure 3.: Comportements typiques de $W(N)$ (nombre d'états avec probabilité non nulle d'un système avec N variables aléatoires) dans la limite $N \rightarrow \infty$ et fonctionnelles entropiques qui, dans l'hypothèse de *probabilités égales* pour tous les états de probabilité non nulle, fournissent des entropies extensives pour des valeurs spécifiques des indices d'entropies non additives correspondants. Pour ce qui est de la classe exponentielle $W(N) \sim A\mu^N$, S_{BG} n'est pas la seule entropie qui satisfait l'extensivité; l'entropie (additive) de Renyi $S_q^R \equiv k(\ln \sum_i p_i^q)/(1-q)$ est aussi extensive pour toutes les valeurs de q . De façon analogue, pour le cas de la classe exponentielle étirée $W(N) \sim C\nu^{N^\gamma}$, l'entropie non additive S_δ n'est pas unique. Toutes les familles illustrées dans cette Table contiennent S_{BG} comme un cas particulier, à la seule exception de S_λ^C , qui est appropriée pour la classe logarithmique $W(N) \sim D \ln N$. Dans la limite $N \rightarrow \infty$, les inégalités $\mu^N \gg \nu^{N^\gamma} \gg N^\rho \gg \ln N \gg 1$ sont satisfaites, donc $\lim_{N \rightarrow \infty} \nu^{N^\gamma}/\mu^N = \lim_{N \rightarrow \infty} N^\rho/\mu^N = \lim_{N \rightarrow \infty} \ln N/\mu^N = 0$. Ceci montre que, dans tous ces cas non additifs, l'occupation de l'espace de phases correspond à une *mesure de Lebesgue nulle*, de façon similaire à pratiquement tous les (multi)fractals. Si l'hypothèse de probabilités égales n'est pas satisfaite, des analyses spécifiques deviennent nécessaires et les résultats peuvent être différents. Source : TSALLIS 2009 et TSALLIS 2022.

Mentionnons, pour finir cette introduction à l'entropie S_q , qu'elle est unique dans plusieurs sens. Plus précisément dans le cadre du théorème d'unicité de Santos (SANTOS 1997), q -généralisation du théo-

rème de Shannon ; du théorème d'unicité d'Abe (ABE 2000), q -généralisation du théorème de Khinchine ; de la factorisabilité de Topsoe (TOPSOE 2005) ; de la géométrie invariante conforme (AMARI, OHARA et MATSUZOE 2012) ; de l'indépendance universelle thermostatique (BIRO, BARNAFOLDI et VAN 2015) et, plus récemment, dans le cadre du théorème d'unicité d'Enciso et Tempesta (ENCISO et TEMPESTA 2017).

Pour ce qui est ce théorème d'unicité, mentionnons qu'une fonctionnelle entropique S est dite de la "forme trace" (*trace form*) lorsqu'elle peut être écrite sous forme $S = \sum_i f(p_i)$ où $f(z)$ est une fonction assez générique (voir détails dans TSALLIS 2022). Aussi, une fonctionnelle entropique est dite "composable" lorsqu'elle satisfait, pour des systèmes A et B indépendants, $S(A+B)/k = F(S(A)/k, S(B)/k)$ où $F(x, y)$ est une fonction qui satisfait quelques propriétés assez génériques (voir détails dans TSALLIS 2022). Le théorème d'Enciso et Tempesta prouve que S_q est la seule fonctionnelle entropique qui est simultanément de la forme trace, composable et contient S_{BG} comme cas particulier : voir Figure 4. Cette remarquable propriété peut jouer un rôle important dans la compréhension de pourquoi S_q ainsi que les propriétés qui lui sont associées apparaissent si fréquemment dans la nature.

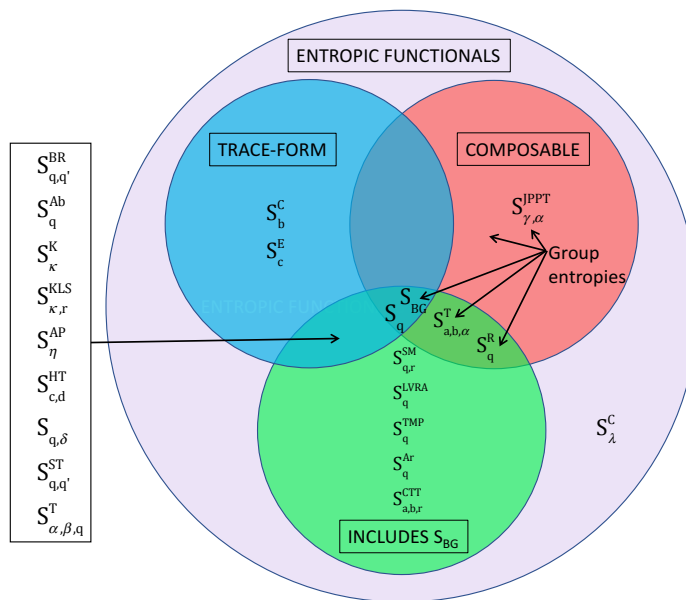


Figure 4.: Il existe actuellement dans la littérature plus de cinquante formes fonctionnelles entropiques, dont celles de Renyi S_q^R , Tempesta $S_{a,b,\alpha}^T$, Jensen–Pazuki–Pruessner–Tempesta $S_{\gamma,\alpha}^{JPPPT}$, Sharma–Mittal $S_{q,r}^{SM}$, Landsberg–Vedral–Rajagopal–Abe S_q^{LVRA} , Tsallis–Mendes–Plastino S_q^{TMP} , Arimoto S_q^{Ar} , Curado–Tempesta–Tsallis $S_{a,b,r}^{CTT}$, Borges–Roditi $S_{q,q'}^{BR}$, Abe S_q^{Ab} , Kaniadakis S_{κ}^K , Kaniadakis–Lissia–Scarfione $S_{\kappa,r}^{KLS}$, Anteneodo–Plastino S_{η}^{AP} , Hanel–Thurner $S_{c,d}^{HT}$, Schwammle–Tsallis $S_{q,q'}^{ST}$, Tempesta $S_{\alpha,\beta,q}^T$, Curado S_b^C , Curado S_{λ}^C , Tsekouras–Tsallis $S_c^E \equiv S_c^{TT}$, Pal–Pal S^{PP} , et bien d'autres. La forme S_{λ}^C est un cas rare qui n'inclut pas S_{BG} comme cas particulier, et elle n'est ni de la forme trace ni composable. La forme S_q est la seule qui satisfait ces trois propriétés simultanément. Source : TSALLIS 2022.

4. Quelques illustrations analytiques, informatiques, expérimentales et observationnelles

Il y a dans la littérature une considérable quantité d'applications des entropies non additives et de la mécanique statistique non extensive à des systèmes complexes naturels, artificiels et sociaux. À titre

d'illustrations dans les sciences naturelles, nous avons sélectionné dans cette Section quelques systèmes physiques typiquement étudiés dans ce cadre (voir, par exemple, TSALLIS 2022).

4.1. Systèmes quantiques à N corps

Les systèmes Hamiltoniens à une dimension avec des interactions à courte portée ne peuvent pas avoir des transitions de phases à des températures finies. Mais ceci n'est pas interdit à $T = 0$. C'est le cas pour le système ferromagnétique d'Ising en présence d'un champs transverse λ , ainsi que pour tous ceux caractérisés par une *charge centrale* $c > 0$ ($c = 1/2$ correspond précisément au modèle d'Ising). Considérons une chaîne linéaire de N spins dans la limite $N \rightarrow \infty$. Une transition de phase quantique du deuxième ordre a lieu à $T = 0$ pour une valeur critique $\lambda_c \neq 0$. Considérons, sur ce point, un sous-système constitué par $L \gg 1$ spins voisins. L'entropie de von Neumann $S_{BG}(L)$ croît comme $S_{BG}(L) \sim k(c/3) \ln L$ ($L \rightarrow \infty$). Elle n'est donc pas extensive, et l'on ne peut pas utiliser les relations thermodynamiques usuelles. On prouve (CARUSO et TSALLIS 2008) par contre que l'entropie non additive $S_q(L) \propto L$ ($L \rightarrow \infty$) pour la valeur (unique)

$$q = \frac{\sqrt{9 + c^2} - 3}{c} \in (0, 1). \quad (1)$$

Voir Figure 5.

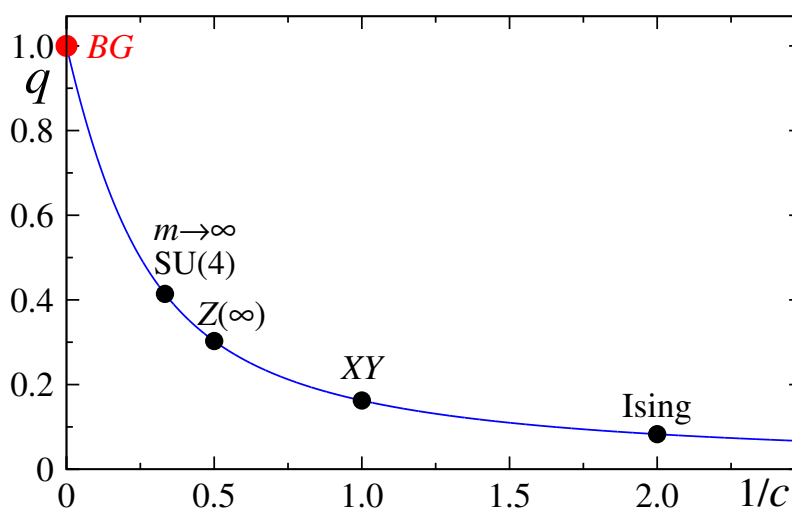


Figure 5.: L'indice q en fonction de $1/c$, comme déterminé (CARUSO et TSALLIS 2008) à partir de premiers principes (plus précisément à partir de la classe d'universalité de l'Hamiltonian), tel que $S_q(L)$ soit extensive, c'est à dire, $0 < \lim_{L \rightarrow \infty} [S_{\frac{\sqrt{9+c^2}-3}{c}}(L)/L] < \infty$. Quand c croît de 0 à l'infini, q croît de 0 à l'unité. Les valeurs $c = 1/2$ (donc $q = \sqrt{37} - 6 \simeq 0.0828$) et $c = 1$ (donc $q = \sqrt{10} - 3 \simeq 0.1623$) correspondent respectivement aux chaînes ferromagnétiques d'Ising et XY en présence d'un champs transverse critique à $T = 0$; pour $c = 4$, $q = 1/2$, pour $c = 6$, $q = \frac{2}{\sqrt{5}+1} = \frac{1}{\Phi}$, où Φ est le nombre d'or, et, for $c \gg 1$, q s'approche de la valeur $q = 1$ (BG). Pour d'autres modèles, voir ALCARAZ 1987 et ALCARAZ et MARTINS 1990. Ces valeurs anormales de q ont lieu unique et précisément au point critique du deuxième ordre à température nulle; partout ailleurs le comportement BG ($q = 1$) typique des interactions de courte portée est correcte. Source : TSALLIS et HAUBOLD 2015.

4.2. Systèmes classiques à N corps

Tous les systèmes Hamiltoniens classiques à N corps avec interactions de courte portée ($\alpha/d > 1$) en équilibre thermique avec un thermostat (à la température T) ont deux propriétés marquantes et univer-

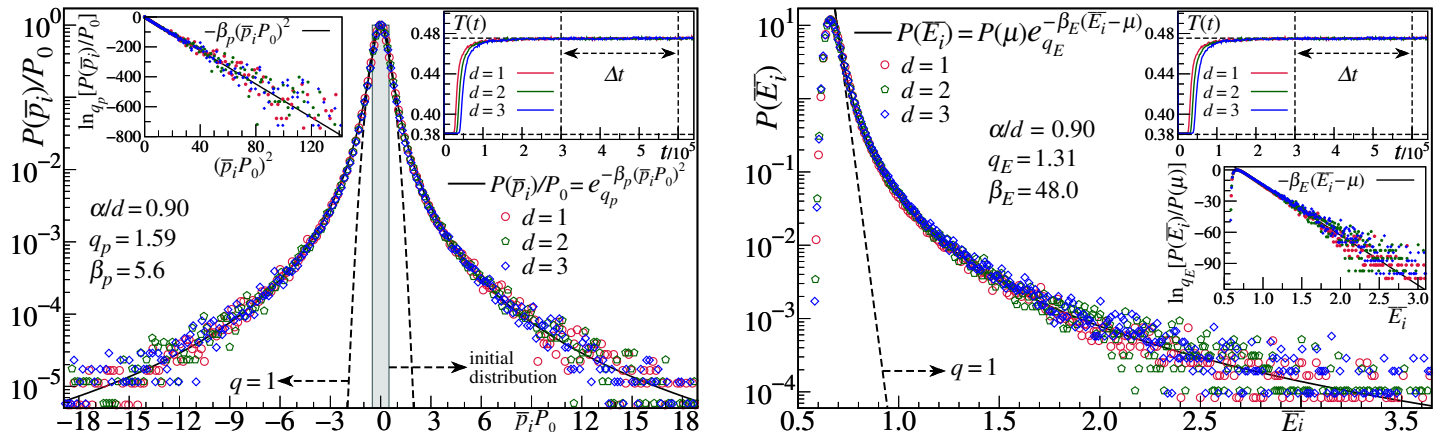


Figure 6.: Distributions temporellement moyennées des moments \bar{p}_i et des énergies \bar{E}_i pour le modèle XY ferromagnétique inertiel pour $\alpha/d = 0.9$, à $d = 1, 2$ et 3 dimensions. Les simulations ont été faites pour une énergie par particule $u = 0.69$ et un nombre de rotateurs $N = 1000000$. (a) La distribution $P(\bar{p}_i)$ est montrée [$P_0 \equiv P(\bar{p}_i = 0)$]; la ligne continue est une q -Gaussienne avec $q_p = 1.59$ et $\beta_p = 5.6$; la ligne pointillée est une Gaussienne ($q = 1$). L'encart gauche montre les mêmes données dans une représentation q -logarithme *versus* moment carré; comme attendu, les données sont approchées par une ligne droite (puisque $\ln_q(e^x) = x$). (b) La ligne continue représente la q -exponentielle $P(\bar{E}_i) = P(\mu) \exp_{q_E}[-\beta_E(\bar{E}_i - \mu)]$, avec $q_E = 1.31$ ($\beta_E = 48.0$, $\mu = 0.69$, et $P(\mu) = 12$); l'exponentielle correspondante (ligne pointillée) est aussi montrée pour comparaison. Le paramètre μ a été introduit vu que la connaissance de la densité d'états est nécessaire pour reproduire l'ensemble complet des données. L'encart inférieur montre une ligne droite en représentant q -logarithme comme ordonnée. La température cinétique $T(t) \equiv 2K(t)/N$, et l'intervalle Δt au long duquel les moyennes temporelles ont été calculées, coïncident dans les deux cas (montrés dans les encarts). Dans toutes les figures nous observons le collapse des courbes correspondantes aux trois dimensions, avec la même valeur pour q . La connection, analytique si possible, entre toutes les valeurs apparaissant dans ces courbes reste à faire. (Source : CIRTO et AL 2018).

selles, soit une distribution Gaussienne (Maxwellienne) des vitesses et une distribution exponentielle (poids de Boltzmann-Gibbs) d'énergies. Ceci n'est plus vrai pour des interactions de longue portée ($0 \leq \alpha/d \leq 1$), ce qui constitue une claire évidence de la non applicabilité de la mécanique statistique de BG. La cause en est le fait que les interactions de longue portée font que, dans la limite $N \rightarrow \infty$, le spectre de Lyapunov s'annule, le système ne pouvant plus développer du *chaos fort* (sensitivité aux conditions initiales qui croît exponentiellement avec le temps), mais seulement du *chaos faible* (sensitivité aux conditions initiales qui croît selon une loi de puissance avec le temps) : voir, par exemple, ANTENEODO et TSALLIS 1998. Plusieurs modèles classiques ont été étudiés à partir des premiers principes ($\vec{F} = m\vec{a}$), les interactions étant d'une portée de longueur générique ($\alpha \geq 0$; $d = 1, 2, 3$), tels que le α -XY, α -Heisenberg et α -Fermi-Pasta-Ulam. Ils montrent des distributions de vitesses q -Gaussiennes et des distributions d'énergie q -exponentielles. Ces faits suggèrent l'applicabilité physique de la q -généralisation du théorème de la limite centrale (UMAROV, TSALLIS et STEINBERG 2008, ainsi que UMAROV, TSALLIS, GELL-MANN et STEINBERG 2010). Voir, par exemple, la Fig. 6.

4.3. Système dynamique dissipatif non linéaire de basse dimensionalité

Considérons la récurrence uni-dimensionnelle dissipative dite *logistique*

$$x_{t+1} = 1 - ax_t^2 \quad (0 \leq a \leq 2; x_t \in [-1, 1]; t = 0, 1, 2, \dots). \quad (2)$$

La sensibilité aux conditions initiales est définie par

$$\xi \equiv \lim_{\Delta x(0) \rightarrow 0} \frac{\Delta x(t)}{\Delta x(0)}. \quad (3)$$

Pour toutes les valeurs de a pour lesquelles l'exposant de Lyapunov λ_1 est positif, nous avons

$$\xi(t) = e^{\lambda_1 t}. \quad (4)$$

Par contre, pour le point de Feigenbaum-Coulet-Tresser (seuil du chaos) $a = a_c \equiv 1.40115518909 \dots$, nous avons $\lambda_1 = 0$, et

$$\xi(t) = e^{\lambda_{q_c} t}. \quad (5)$$

où q_c satisfait

$$\frac{1}{1 - q_c} = \frac{\ln \alpha_F}{\ln 2} \quad (6)$$

où α_F est la constante de Feigenbaum. Il s'ensuit que

$$q_c = 0.244487701341282066198 \dots \quad (7)$$

En fait, 1008 chiffres décimales exactes sont disponibles dans la littérature. Voir détails dans LYRA et TSALLIS 1998, BALDOVIN et ROBLEDO 2004 et TSALLIS 2009. Voir aussi la Fig. 7.

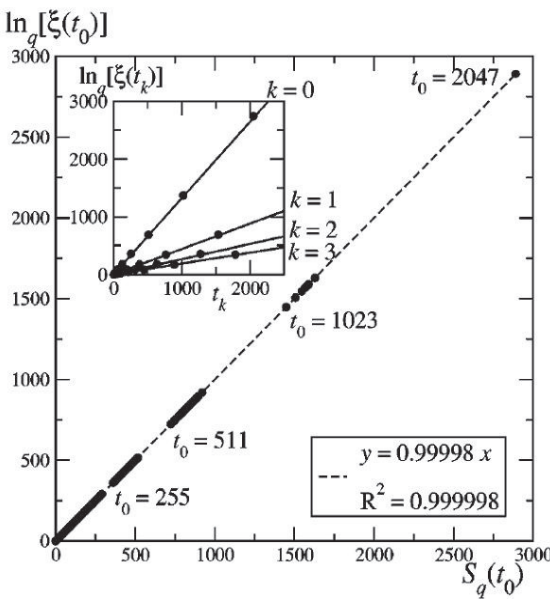


Figure 7.: Vérification numérique (cercles noirs) de la q -généralisation de l'identité du type Pesin $K_q^{(k)} = \lambda_q^{(k)}$ au seuil du chaos de la carte logistique. Sur l'ordonnée on représente le q -logarithme de ξ_{t_k} (égal à $\lambda_q^{(k)} t$), et sur l'abscisse S_q (égal à $K_q^{(q)} t$), toutes deux pour $q = q_c$. La ligne pointillée est une regression linéaire. Encart : Les lignes noires sont obtenues analytiquement. Source : BALDOVIN et ROBLEDO 2004.

4.4. Système dynamique conservatif non linéaire de basse dimensionalité

La recurrence bi-dimensionnelle conservative dite *standard* est definie comme suit :

$$\begin{aligned} p_{i+1} &= p_i - K \sin x_i \pmod{2\pi} \quad (K \geq 0) \\ x_{i+1} &= x_i + p_{i+1} \pmod{2\pi} \end{aligned} \quad (8)$$

Elle preserve l'aire infinitésimale dans l'espace (x, p) pour toute valeur de $K \geq 0$; sauf pour $K = 0$, elle est non linéaire.

Des portraits de phase typiques sont montrés dans la Fig. 8 (*Gauche*). Chaque point (x, p) est associé à l'exposant de Lyapunov $\lambda^{(1)} = -\lambda^{(2)} \geq 0$: voir Fig. 8 (*Droite*). Ensuite, au long des lignes du Théorème de la Limite Centrale, nous définissons la variable

$$\bar{y} \equiv \sum_{i=1}^T (x_i^{(j)} - \langle x \rangle), \quad (9)$$

avec

$$\langle x \rangle \equiv \frac{1}{M} \frac{1}{T} \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^T x_i^{(j)}, \quad (10)$$

où $M \gg 1$ (typiquement $M \geq 10^7$) est le nombre des conditions initiales et $T \gg 1$ (typiquement $T \geq 2^{23} \simeq 10^7$) est le nombre d'itérations pour chacune de ces M conditions initiales. Finalement, en construisant l'histogramme pour \bar{y} , nous obtenons les résultats indiqués dans la Fig. 9. Le cas limite $K = 0$ (c'est à dire une recurrence linéaire, ayant toutefois un ensemble d'orbites stables hautement non trivial) a été revisité avec plus de précision (TIRNAKLI et TSALLIS 2020) et la valeur $q_{\text{attract}} \simeq 1.935$ a été reobtenue. Cependant, une erreur numérique persistante n'étant pas exclue, un effort analytique a été entrepris qui a bien réussi (BOUNTIS, VEERMAN et VIVALDI 2020), la valeur exacte étant $q_{\text{attract}} = 2$.

Nous voyons donc que les régions où l'exposant de Lyapunov est positif (*chaos fort*, c'est à dire, sensibilité aux conditions initiales dominante croissant exponentiellement avec le temps) sont associées à $q = 1$, alors que celles où l'exposant de Lyapunov est nul (*chaos faible*, c'est à dire, sensibilité aux conditions initiales dominante croissant sous-exponentiellement avec le temps, c'est à dire de façon plus lente qu'une exponentielle) sont associées à $q \neq 1$, ou un autre indice entropique violant l'additivité de l'entropie. Cet exemple révèle très probablement une réalité profonde et générique. De la même façon que les systèmes thermostatiques dont la dynamique est fortement chaotique sont correctement décrits par la mécanique statistique de BG, basée sur l'entropie additive de BG, ceux dont la dynamique est faiblement chaotique sont décrits par des mécaniques statistiques généralisées basées sur des entropies non additives. En particulier, les dynamiques dont la sensibilité aux conditions initiales dominante croît comme une puissance du temps sont à être associées à la mécanique statistique non extensive basée sur l'entropie S_q .

4.5. Atomes froids dans un réseau optique dissipatif

En 2003 Lutz a suggéré (LUTZ 2003) que la distribution de vitesses d'atomes froids dans des réseaux optiques dissipatifs devraient être une q -Gaussienne avec $q = 1 + 44E_R/U_0$, E_R et U_0 étant des paramètres du potentiel cristallin. La prédiction de Lutz a été vérifiée informatiquement et expérimentalement en 2006 (DOUGLAS, BERGAMINI et RENZONI 2006, LUTZ et RENZONI 2013) : voir Fig. 10.

4.6. Matière granulaire

Une autre validation expérimentale de la q -statistique a été réalisé avec de la matière granulaire. En 1996, la loi d'échelle $\alpha = 2/(3 - q)$ a été prédite par TSALLIS et BUKMAN 1996, α étant défini par

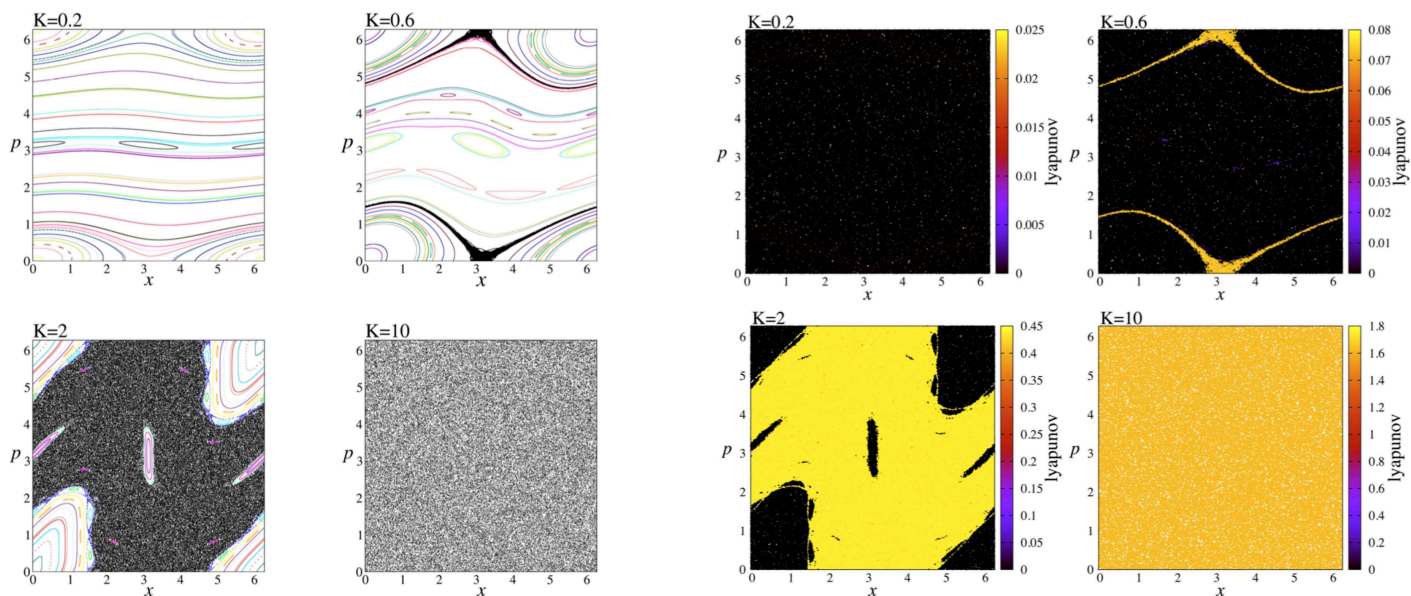


Figure 8.: *Gauche* : Portraits de phase de la recurrence standard pour des valeurs représentatives de K . Dans chaque cas, les points noirs représentent la région de la mer chaotique dans l'espace de phase accessible, et toutes les autres couleurs représentent différentes îles de stabilité. *Droite* : Exposants de Lyapunov. Dans chaque cas, les exposants de Lyapunov ont été calculés pour 200000 conditions initiales. Chaque condition initiale est itérée 10^7 fois. Source : TIRNAKLI et BORGES 2016.

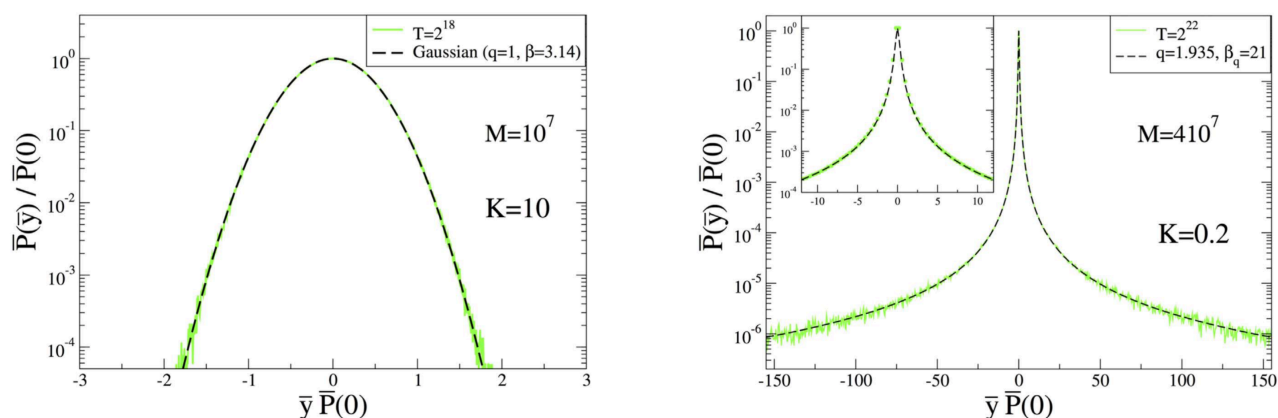


Figure 9.: Distribution de probabilités normalisée pour $K = 10$ avec un nombre d'itérations $T = 2^{18}$ (*Gauche*) et pour $K = 0.2$ avec $T = 2^{22}$ (*Droite*). Source : TIRNAKLI et BORGES 2016.

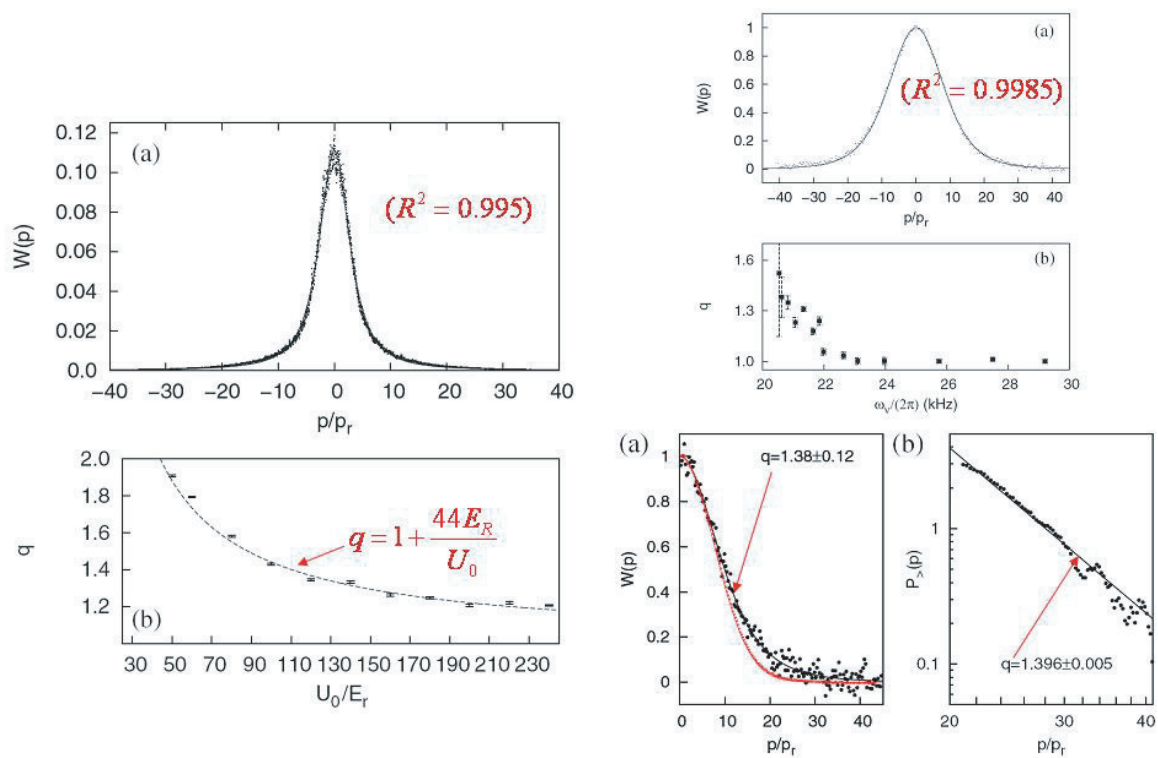


Figure 10.: Vérification de la prédiction de 2003 de Lutz : calcul informatique avec du Monte Carlo quantique (*Gauche*) et vérification au laboratoire avec des atomes de C_s (*Droite*). La courbe rouge correspond à une distribution Maxwellienne. Source : DOUGLAS, BERGAMINI et RENZONI 2006.

l'échelle de diffusion anormale $x^2 \sim t^\alpha$, et q étant l'indice de la solution q -Gaussienne de l'équation non linéaire de Fokker-Planck introduite par PLASTINO et PLASTINO 1995. Cette prédiction a été vérifiée dans une erreur de $\pm 2\%$ en 2015 (COMBE, RICHEFEU, STASIAK et ATMAN 2015) : voir Figs. **11**, **12** et **13**.

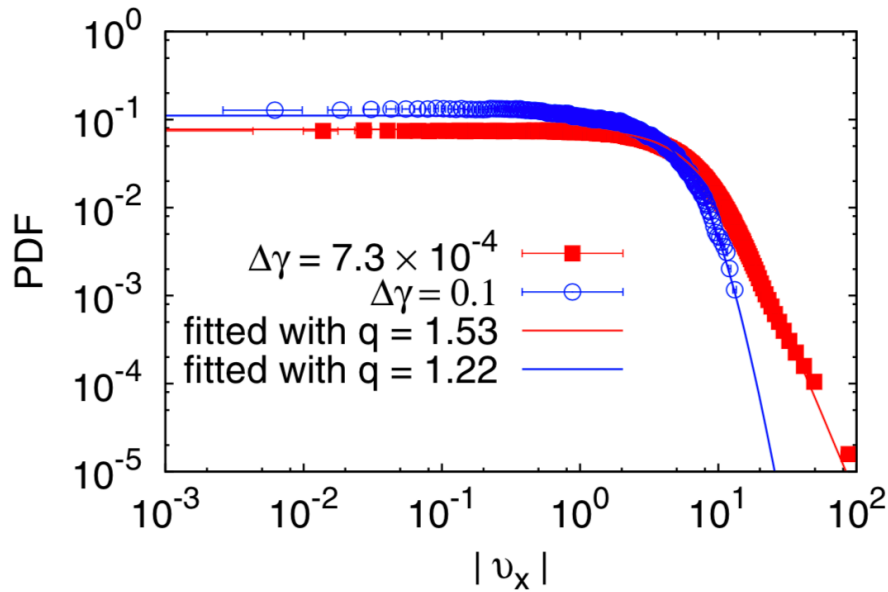


Figure 11.: Densité de probabilités des composantes horizontales des déplacements fluctuants pendant deux incréments différents de la déformation de cisaillement ($\Delta\gamma = 7.3 \times 10^{-4}$ et $\Delta\gamma = 10^{-1}$). Les points correspondent aux données expérimentales, et les lignes continues correspondent à des approximations q -Gaussiennes. Source : COMBE, RICHEFEU, STASIAK et ATMAN 2015.

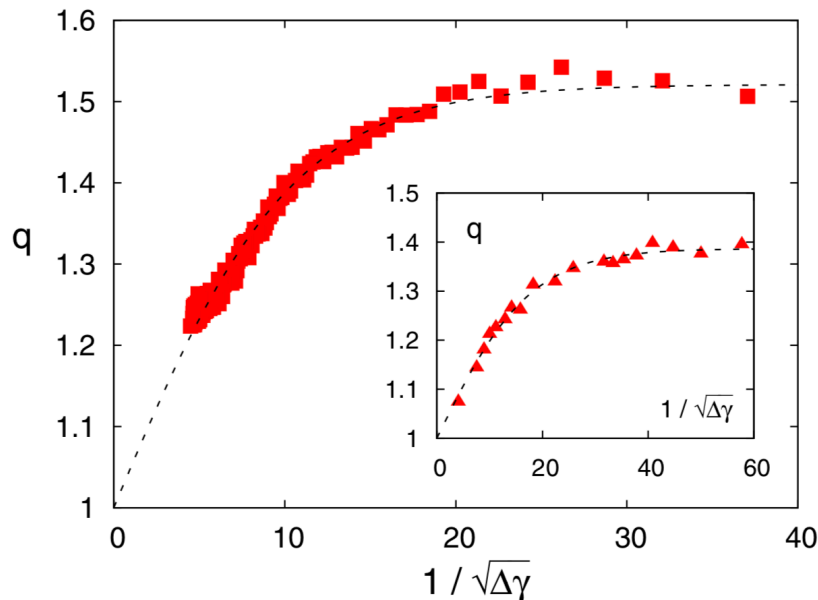


Figure 12.: Evolution de la valeur mesurée de q en fonction de l'inverse de la racine carrée de l'incrément de cisaillement pour les expériences et les simulations. La ligne pointillée correspond à la regression utilisant la fonction $q(1/\sqrt{\Delta\gamma}) = 1 + a \tanh(b/\sqrt{\Delta\gamma})$, avec $(a, b) = (0.521, 0.096)$. *Cadre intérieur* : la même représentation pour les données des simulations qui focalise la limite $q = 1$ quand $\Delta\gamma \rightarrow \infty$. Les paramètres pour la simulation ont été $(a, b) = (0.387, 0.057)$. Source : COMBE, RICHEFEU, STASIAK et ATMAN 2015.

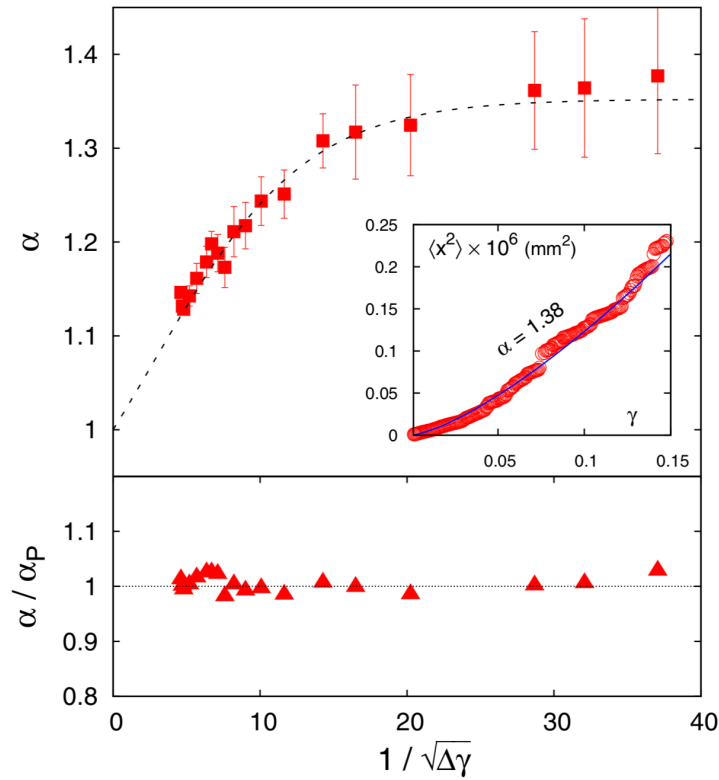


Figure 13.: Vérification de la loi d'échelle $\alpha = 2/(3 - q)$ (TSALLIS et BUKMAN 1996) pour différents régimes de diffusion. *Haut* : Evolution de l'exposant de diffusion α mesuré comme fonction de $1/\sqrt{\Delta\gamma}$; la ligne pointillée est une application directe de la loi d'échelle à partir des valeurs montrées dans la Fig. 12, $\alpha(1/\sqrt{\Delta\gamma}) = 2/[3 - q(1/\sqrt{\Delta\gamma})]$. *Cadre intérieur* : Courbe de diffusion typique montrant les déplacements carrés moyens des fluctuations $\langle x^2 \rangle$ comme fonction de la déformation de cisaillement γ ; ceci permet l'évaluation de l'exposant de diffusion $\alpha \equiv \mu$ pour chaque fenêtre de cisaillement testée. Pour le cas montré, cela correspond à la plus petite fenêtre de cisaillement, le point le plus à droite dans la courbe de la figure principale. Observer que pour un taux de cisaillement constant, γ est proportionnel au temps. *Bas* : Mesure de la déviation des données relative à la loi d'échelle prédite $\alpha_P = 2/(3 - q)$, comme fonction de $1/\sqrt{\Delta\gamma}$, ce qui montre une concordance remarquable de l'ordre de $\pm 2\%$. Source : COMBE, RICHEFEU, STASIAK et ATMAN 2015.

4.7. Hautes énergies sur Terre

Dans le domaine des hautes énergies, il y a une activité intense liée à la q -statistique, très particulièrement focalisant des collisions electron-positron, proton-proton, proton-ion, ion-ion, la détection des neutrinos solaires et des rayons cosmiques. À titre illustratif, nous pouvons voir les Figs. 14 et 15. Un résultat théorique remarquable a été publié en 2020 (DEPPMAN, MEGIAS et MENEZES 2020). Dans un cadre des champs de Yang-Mills, un calcul de chromodynamique quantique a abouti à

$$\frac{1}{q-1} = \frac{11}{3}N_c - \frac{2}{3}N_f, \quad (11)$$

où N_c est le nombre de couleurs et N_f le nombre de saveurs ('flavors'). La symétrie $SU(6)$ implique $N_c = N_f/2 = 3$, donc $1/(q-1) = 7$, donc $q = 8/7 \simeq 1.14$, une valeur parfaitement proche de $q \simeq 1.13 \pm 0.02$ mesurée au LHC/CERN (Fig. 14) au long de beaucoup de décades expérimentales ; il faut aussi remarquer que la valeur observée $T = 0.13$ GeV correspond pratiquement à la masse de pions, omniprésents dans les collisions proton-proton. Aussi, la symétrie $SU(3)$ implique $N_c = N_f = 3$,

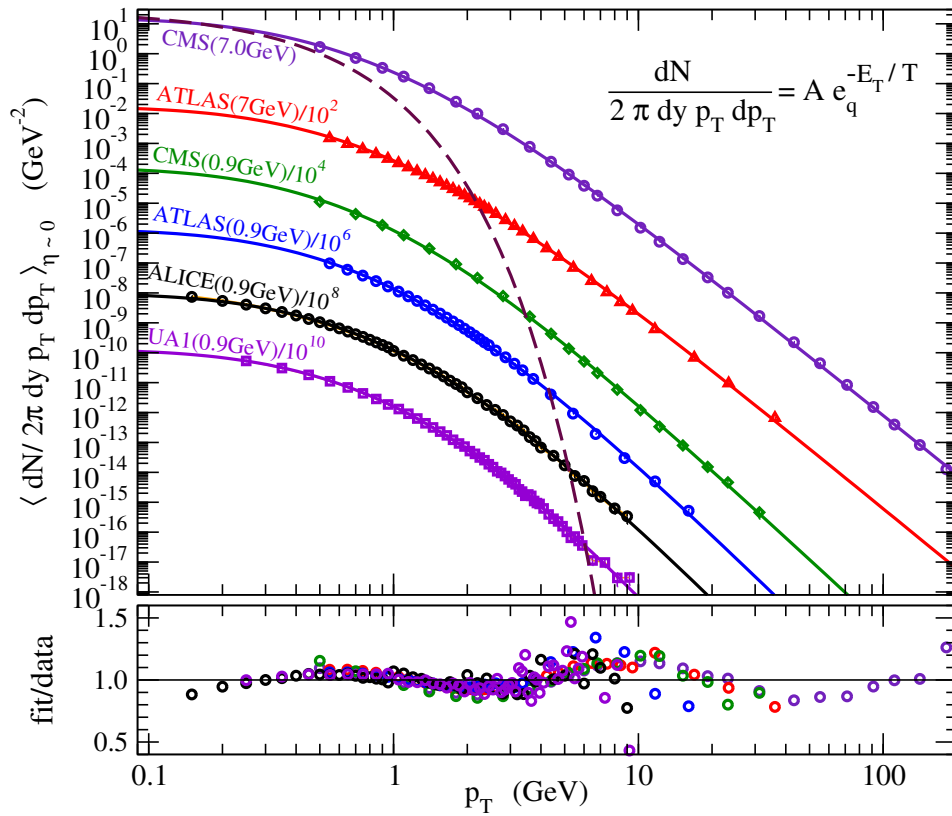


Figure 14.: Comparaison des distributions expérimentales des moments transverses hadroniques dans des collisions pp à rapidité centrale y avec q -exponentielles théoriques avec $q \simeq 1.14 \pm 0.02$ et $T \simeq (0.13 \pm 0.01) \text{ GeV}$. La distribution de Boltzmann-Gibbs (exponentielle pure) est illustrée comme une courbe pointillée. Pour mieux visualiser, aussi bien les données expérimentales que les courbes analytiques elles ont été divisées par un facteur constant comme indiqué. Les raisons donnés/courbes sont montrées en bas, où un comportement approximativement log-périodique est observé au dessus de la q -exponentielle. Source : WONG, WILK, CIRTO et TSALLIS 2015.

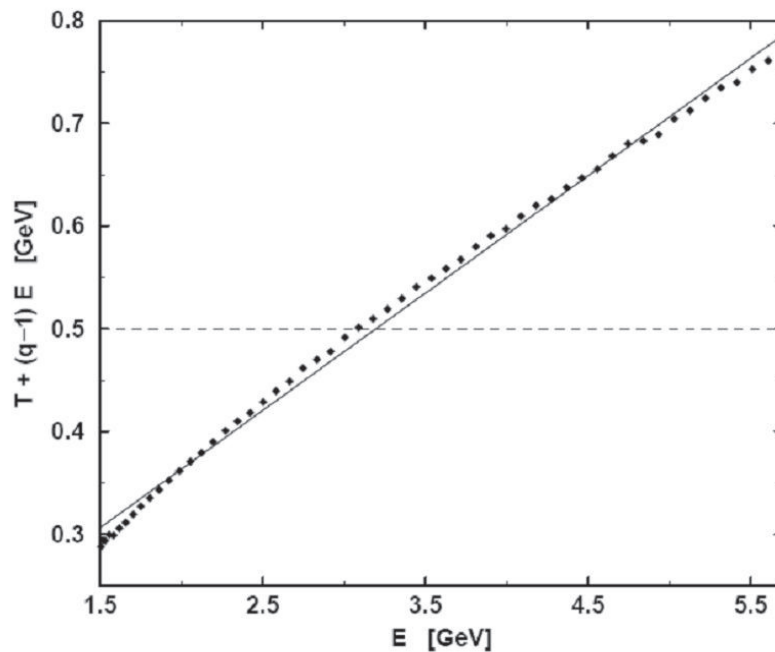


Figure 15.: Des calculs de diffusion de quarks du type charm dans un plasma quark-gluons fournissent les lignes droites continue et pointillée correspondent à des approches q -statistiques phénoménologiques $q = 1$ et $q = 1.114$ respectivement. Les points ont été obtenus à travers un calcul quantique. Source : WALTON et RAFELSKI 2000.

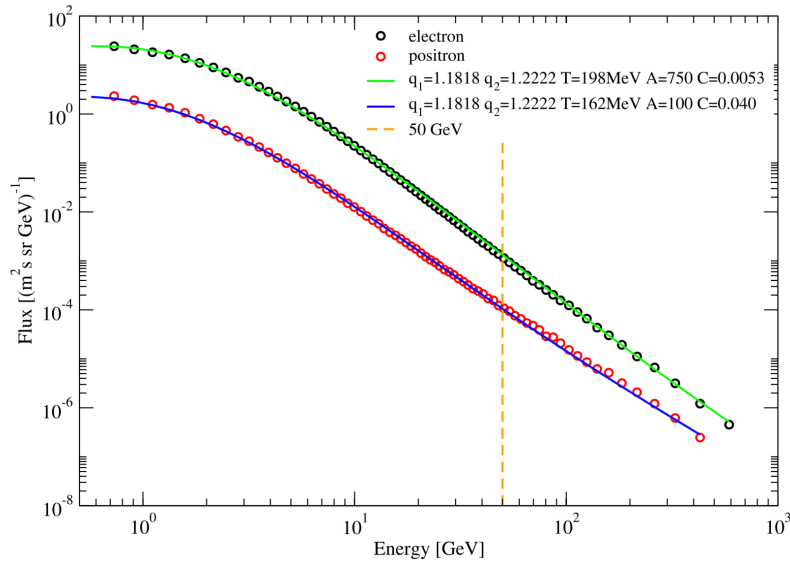


Figure 16.: Les données mesurées par le AMS-02 sont approchées de façon satisfaisante par une combinaison linéaire de distributions 'escort' et non-'escort' (lignes continues); $q_1 = 13/11$ et $q_2 = 1/(2 - q_1) = 11/9$. Pour des détails voir YALCIN et BECK 2018.

donc $N_c = N_f = 3$, donc $q = 10/9 \simeq 1.11$, qui coïncide avec la valeur phénoménologiquement avancée dans la Fig. 15 (approche théorique d'un quark lourd diffusant dans un plasma quark–gluon).

4.8. Hautes énergies dans l'espace

Il y a eu récemment plusieurs mesures intéressantes de rayons cosmiques à partir de laboratoires dans l'espace, hors de la Terre, tels que le Alpha Magnetic Spectrometer (AMS) sur la Station Spatiale Internationale. Voir la Fig. 16 (YALCIN et BECK 2018).

5. Quelques questions ouvertes

– Plusieurs Hamiltonians classiques inertiels d -dimensionnels de N corps ont été α -généralisés et étudiés dans la littérature, où α est défini à travers une interaction attractive à deux corps qui, au delà d'une distance r minimale inaccessible, décroît avec la distance comme $1/r^\alpha$ avec $\alpha \geq 0$. Des tels exemples sont les modèles ferromagnétiques XY et Heisenberg ainsi que le système d'oscillateurs non linéaires couplés de Fermi-Pasta-Ulam-Tsingou (voir, par exemple, TSALLIS 2022). Le potentiel par particule est intégrable pour $\alpha/d > 1$, mais diverge pour $0 \leq \alpha/d \leq 1$. Les interactions avec $0 \leq \alpha/d \leq 1$ sont dites de *longue portée*, alors que celles avec $\alpha/d > 1$ sont dites de *courte portée*. Cette dénomination se prête toutefois à un possible malentendu. Pour l'éviter, nous pouvons introduire aussi la dénomination *très courte portée*, pour faire référence à une décroissance exponentielle du type $\propto e^{-r/R}$ avec $1/R > 0$, ou alors, de façon pratiquement équivalente, lorsque le couplage existe seulement pour un nombre *fini* de voisins d'un élément quelconque du système. Ces détails s'avèrent très importants. En effet, une importante question se pose, à savoir pour quelle classe d'interactions la théorie de BG est légitime? Toutes les informations accessibles actuellement indiquent que $q = 1$ pour $1/R > 0$ ainsi que pour $\alpha/d \rightarrow \infty$, alors que, pour les distributions de vitesses et pour les distributions d'énergies, $q > 1$ si

$1/R = 0$ et $0 \leq \alpha/d < \alpha_c/d \leq \infty$. Il est possible d'unifier cette affirmation en supposant que, au delà d'une distance inaccessible, la constante de couplage attractif décroît comme un potentiel semblable à celui de Yukawa, plus exactement comme $r^{-\alpha} e^{-r/R}$. La théorie de BG serait donc applicable, c'est à dire qu'elle décrirait correctement les propriétés thermostatiques du système classique à N corps, si $1/R > 0$, $\forall(\alpha/d) \geq 0$, ainsi que pour $\alpha/d \rightarrow \infty$ si $1/R = 0$. Autrement, tout indique qu'il faut utiliser $q \neq 1$ dans certains de ces regimes.

Une précaution est toutefois nécessaire. Les conjectures ci-dessus sont faites pour des systèmes dont la longueur de la portée est celle de la constante de couplage et non pas des variables dynamiques elles mêmes. Il est ainsi possible que la situation soit différente quand la longueur de la portée concerne les coordonnées elles mêmes. Par exemple, si nous avons un fluide du genre Lennard-Jones α -généralisé, avec une interaction attractive qui décroît aux longues distances comme $1/r^\alpha$, il n'est pas évident que les différents regimes soient les mêmes que ceux décrits ci-dessus. Il n'est pas exclus qu'une valeur critique $\alpha_c/d > 1$ existe (par exemple $1 < \alpha_c/d < 2$, genre $\alpha_c/d \simeq 3/2$) telle que le regime $\alpha/d < \alpha_c/d$ soit différent de celui correspondant à $\alpha/d > \alpha_c/d$. Il se pourrait, par exemple, que $q \neq 1$ pour $0 \leq \alpha/d < \alpha_c/d$ alors que $q = 1$ pour $\alpha/d > \alpha_c/d$. Si tel est le cas, le fluide standard de Lennard-Jones ($\alpha = 6$ et $d = 3$, donc $\alpha/d = 2$) est $q = 1$ alors que son analogue pour XY ou Heisenberg pourrait être $q \neq 1$.

– La discussion ci-dessus est fortement reliée à des considérations dynamiques microscopiques telles que si l'exposant de Lyapunov maximale λ_{max} est positif ou nul dans la limite $N \rightarrow \infty$. Il se peut, par exemple, qu'avoir un exposant de Lyapunov maximale nul soit nécessaire mais pas suffisant pour avoir q -distributions. Dans les systèmes qui ont été étudiés numériquement, l'exposant λ_{max} semble décroître comme $1/N^{\kappa(\alpha/d)}$ ($N \rightarrow \infty$) avec $\kappa > 0$ (donc $\lim_{N \rightarrow \infty} \lambda_{max}(N) = 0$) pour $0 \leq \alpha/d < \alpha_c/d$ où $\alpha_c/d > 1$. Dans les approches numériques, il faut aussi faire très attention à l'ordre des limites $N \rightarrow \infty$ et $t \rightarrow \infty$ (c'est à dire que l'ordre dans lequel on prend ces limites peut être determinant).

– Les conditions des Théorèmes de la Limite Centrale q -généralisés (e.g., UMAROV, TSALLIS et STEINBERG 2008, UMAROV, TSALLIS, GELL-MANN et STEINBERG 2010, UMAROV et TSALLIS 2016, UMAROV et TSALLIS 2022) sont suffisantes pour avoir des distributions limites de la forme q -Gaussienne ou (q, α) -stable, mais sont-elles aussi nécessaires ? La reponse semble être négative, mais cette question reste à présent ouverte.

– Dans le cadre de la Théorie des Grandes Déviations (TLD) une probabilité exponentielle $P(N)$ joue un rôle analogue à la distribution de BG dans la mécanique statistique standard (TOUCHETTE 2009). Plusieurs systèmes probabilistes ou dynamiques avec N variables aléatoires ont été étudiés numériquement (RUIZ et TSALLIS 2012, TOUCHETTE 2013, RUIZ et TSALLIS 2013, TIRNAKLI, TSALLIS et AY 2021, TIRNAKLI, MARQUES et TSALLIS 2022). Ces systèmes ont, dans la limite $N \rightarrow \infty$, une Q -Gaussienne avec $Q > 1$ comme attracteur de la somme des N variables aléatoires fortement corrélées, et présentent une probabilité $P(N)$ q -exponentielle avec $q(Q) > 1$ (avec $q(1) = 1$) dans le cadre de de TLD. Une question mathématique intéressante se pose donc : Avoir une Q -Gaussienne ($Q > 1$) comme attracteur par rapport à la somme de N variables aléatoires d'un système probabiliste est nécessaire et/ou suffisant pour avoir une probabilité $P(N)$ q -exponentielle avec $q(Q) > 1$ dans la Théorie des Grandes Déviations (TLD) correspondante ? Dans quelles conditions précises l'argument de la forme q -exponentielle de $P(N)$ est proportionnel à N , de telle sorte que l'extensivité entropique imposée par la structure de Legendre de la thermodynamique soit préservée ?

– Dans le cadre de la théorie de BG il n’y a qu’une seule valeur de l’indice q , soit $q = 1$. En mécanique statistique non extensive la situation est bien plus complexe. L’indice q dépend non seulement de la classe d’universalité à laquelle appartient le système, mais aussi de la classe de propriétés à laquelle on s’intéresse, ainsi que de la classe de conditions de contour auxquelles le système est soumis. Tout ceci fait qu’en général un nombre infini (denombrable) d’indices q émerge, dont seulement quelques uns sont indépendants, les autres étant déterminés par des relations concrètes et relativement simples (voir des exemples dans TSALLIS, GELL-MANN et SATO 2005, TSALLIS 2009). C’est dans ce cadre qu’on étudie dans la littérature le q -triplet (TSALLIS 2004, BURLAGA et VINAS 2005). L’algèbre générale de ces indices $\{q\}$ est encore inconnue, quoique une partie du chemin a déjà été parcouru (TSALLIS 2017a, TSALLIS 2017b, GAZEAU et TSALLIS 2019), et plusieurs vérifications expérimentales sont disponibles dans la littérature.

6. Conclusions et perspectives

Nous pouvons, pour conclure, toucher brièvement à quelques points qui émergent souvent dans les discussions scientifiques lorsqu’on parle d’entropie, l’un des concepts les plus subtiles de la physique contemporaine.

– Il est évident qu’une entropie définie sur des variables continues ne peut pas être utilisée sans restrictions comme une bonne approximation de l’entropie discrète. Par exemple, l’expression continue $S_{BG} = -k \int dx p(x) \ln p(x)$ (x étant une variable réelle sans dimension) ne peut pas toujours se substituer par l’expression discrète $S_{BG} = -k \sum_i p_i \ln p_i$. En effet, si $p(x)$ est une distribution trop étroite, la forme continue devient négative (voir dans TSALLIS, GELL-MANN et SATO 2005 une illustration de ce fait bien connu), ce qui contredit la définition même d’entropie comme information inconnue de l’observateur. Ce genre de restriction est bien entendu aussi applicable à S_q et pratiquement à toutes les fonctionnelles entropiques continues existant dans la littérature.

Cette remarque nous emmène directement à la réflexion sur la nature, discrète ou pas, de l’espace-temps lui-même, ainsi que si les équations “ultimes” de la physique doivent être des équations différentielles (e.g., telles que celles de Newton, Maxwell, Einstein, Schroedinger, Dirac, et bien d’autres) ou plutôt des équations de différences finies (tels que les automates cellulaires). De mon côté, j’opte, pour plusieurs raisons, pour la possibilité discrète. À ce propos, je peux raconter une conversation que j’ai eue, à Rio de Janeiro il y a beaucoup d’années, pendant un déjeuner tête-à-tête avec le physicien théorique Claude Itzykson. Je lui ai demandé : “Ne penses tu pas que le temps soit discret ?” Sa réponse instantanée a été : “J’en suis convaincu, mais je ne sais pas quoi faire avec ça.”

– C’est une longue discussion que de savoir combien de constantes physiques fondamentales indépendantes existent dans la physique théorique contemporaine (voir PLANCK 1900, COHEN-TANNOUDJI 1998, TSALLIS et ABE 1998, TSALLIS 2009, DUFF 2014). Je pense, pour diverses raisons, qu’elles sont quatre, par exemple (\hbar, c, G, k_B) ; vu que la constante d’interaction hyperfine est un nombre pur, il n’est pas nécessaire d’y inclure la charge de l’électron e . C’est avec ces quatre constantes que Planck a défini les aujourd’hui célèbres *temps, longueur, masse et température* de Planck (t_P, l_P, m_P, T_P) .

En prenant $1/c \neq 0$ nous généralisons la mécanique Newtonienne dans la mécanique relativiste restreinte (où le temps et l’espace peuvent s’échanger), et en prenant $G \neq 0$ nous généralisons celle-ci

dans la mécanique relativiste générale (où l'espace-temps accède à la possibilité de se courber) ; le fait que $G \neq 0$ soit déjà présente dans la théorie Newtonienne n'a pas du tout le même rôle fondamentale, puisque'elle ne modifie rien de spéciale dans la structure du formalisme de Newton, où elle n'est qu'une constante d'interaction à deux corps. En prenant $\hbar \neq 0$ nous généralisons la mécanique Newtonienne dans la mécanique quantique (où tous les observables ne sont pas simultanément mesurables). En prenant $1/k_B \neq 0$ nous généralisons, à travers la relation (6), la mécanique statistique de Boltzmann-Gibbs dans la mécanique statistique non extensive, où l'entropie de systèmes indépendants perd son additivité ; le fait que $1/k_B \neq 0$ soit déjà présente dans la théorie de BG n'a pas du tout le même rôle fondamentale, puisqu'elle ne modifie rien de spéciale, servant seulement à définir l'unité d'entropie, donc celle de température.

– Une question qui apparaît de temps en temps est si la nature de q est celle d'une quantité physiquement bien définie ou simplement d'un paramètre d'ajustement. La réponse est très claire, ce sont des quantités physiquement bien définies. Ces indices sont définis a priori, sur une base dynamique/probabiliste microscopique/mésoscopique. Ce qui ne veut pas dire qu'ils soient toujours simples à calculer. Au contraire, l'apparition de difficultés mathématiques insurmontables est plutôt la règle. Le fait qu'il ne s'agit en aucune façon essentielle de paramètres d'ajustement est clairement illustré dans les relations (1) et (11), qui ont été obtenues à partir de premiers principes, c'est à dire de la mécanique (classique, quantique, relativiste, ou autre, telle que la chromodynamique quantique) et de l'électromagnétisme. De la même façon que la théorie classique du mouvement planétaire n'a qu'un seul paramètre d'ajustement, soit G , (le reste, tel que la connaissance des conditions initiales et de toutes les masses du système, n'étant que des particularités mathématiques de la théorie), la mécanique statistique non extensive n'a qu'un seul paramètre d'ajustement, soit k_B (le reste, tel que l'accès à la sensibilité aux conditions initiales parmi d'autres, n'étant que des particularités mathématiques de la théorie). Ces questions et d'autres qui sont reliées ont été récemment discutées en détail dans TSALLIS 2022.

– Finalement, saisissons cette occasion pour faire un pont entre la théorie présente et la célèbre phrase du philosophe espagnol José Ortega y Gasset *Yo soy yo y mi circunstancia* ("Je suis moi et ma circonstance"). Il n'existe pas des systèmes $q = 1$ ou $q \neq 1$. Nous devons toujours prendre en considération que la mécanique statistique qui décrit de façon satisfaisante un système donné ne dépend pas seulement de la nature du système mais aussi de ces circonstances, c'est à dire des échelles temporelle et spatiales qui nous intéressent, du degré de précision qui a été adopté, de la classe de conditions initiales qui ont été utilisées et, finalement, des conditions de contour auxquels le système est placé. Par exemple, l'état stationnaire d'une chaîne d'interactions ferromagnétiques XY entre premiers voisins dont les deux bouts sont à une même température est parfaitement bien décrit par la théorie de BG ($q = 1$), alors que la même chaîne placée à des températures différentes aux deux bouts exhibe, pour son flux de chaleur, un état stationnaire $q > 1$ (LI, LI, TIRNAKLI, LI et TSALLIS 2017). Cette spécificité se reflète linguistiquement dans l'existence dans les langues néolatines tels que l'Espagnol de deux verbes, plus précisément *ser* et *estar*, qui ne se traduisent pas séparément en Français. En effet, en Français il n'y a qu'une seule traduction possible, soit *être*. L'indice q est plus proprement lié au verbe *estar* qu'au verbe *ser*.

Remerciements

Je remercie G. Benedek, E.P. Borges, M. Feidt, H.J. Haubold et S. Miret Artes pour des remarques intéressantes, ainsi que CNPq et Faperj (Agences brésiliennes) pour leur appui financier partiel.

Bibliographie

- ABE S., *Axioms and uniqueness theorem for Tsallis entropy*, Phys. Lett. A **271**, 74 (2000).
- AMARI S., OHARA A. and MATSUZOE H., *Geometry of deformed exponential families : Invariant, dually-flat and conformal geometries*, Physica A **391** (18), 4308-4319 (2012).
- ANTENEODO C. and TSALLIS C., *Breakdown of the exponential sensitivity to the initial conditions : Role of the range of the interaction*, Phys. Rev. Lett. **80**, 5313 (1998).
- BALATONI J. and RENYI A., *Remarks on entropy*, Publications of the Mathematical Institute of the Hungarian Academy of Sciences **1**, 9-40 (1956).
- BALDOVIN F. and ROBLEDO A., *Nonextensive Pesin identity - Exact renormalization group analytical results for the dynamics at the edge of chaos of the logistic map.*, Phys. Rev. E **69**, 045202(R) (2004).
- BARLOW H., *Conditions for versatile learning, Helmholtz's unconscious inference, and the task of perception*, Vision. Res. **30**, 1561 (1990).
- BIRO T.S., BARNAFOLDI G.G. and VAN P., *New entropy formula with fluctuating reservoir*, Physica A **417**, 215-220 (2015).
- BOLTZMANN L., *Weitere Studien über das Wärmegleichgewicht unter Gas molekülen [Further Studies on Thermal Equilibrium Between Gas Molecules]*, Wien, Ber. 66, 275, 1872.
- BOLTZMANN L., *Über die Beziehung eines allgemeine mechanischen Satzes zum zweiten Hauptsatze der Warmetheorie*, Sitzungsberichte, K. Akademie der Wissenschaften in Wien, Math.-Naturwissenschaften 75, 67-73, 1877.
- BOUNTIS A., VEERMAN J.J.P. and VIVALDI F., *Cauchy distributions for the integrable standard map*, Phys. Lett. A **384**, 126659 (2020).
- BURLAGA L.F. and VINAS A.F., *Triangle for the entropic index q of non-extensive statistical mechanic observed by Voyager 1 in the distant heliosphere*, Physica A **356**, 375 (2005).
- CARATHÉODORY C., *Untersuchungen ueber die Grundlagen der Thermodynamik*, Mathematische Annalen **67** (3), 355-386 (1909).
- CARUSO F. and TSALLIS C., *Nonadditive entropy reconciles the area law in quantum systems with classical thermodynamics*, Phys. Rev. E **78**, 021102 (2008).
- CIRTO L.J.L., RODRIGUEZ A., NOBRE F.D. and TSALLIS C., *Validity and failure of the Boltzmann weight*, EPL **123**, 30003 (2018).
- CLAUSIUS R., *Über die Wärmeleitung gasförmiger Körper*, Annalen der Physik, 125 : 353-400, 1865 ; Clausius, R. (1865). *The Mechanical Theory of Heat with its Applications to the Steam Engine and to Physical Properties of Bodies*. London : John van Voorst, 1 Paternoster Row. MDCCCLXVII.
- COHEN-TANNOUDJI G., *Les Constantes Universelles*, Collection *Pluriel* (Hachette, Paris, 1998).
- COMBE G., RICHEFEU V., STASIAK M. and ATMAN A.P.F., *Experimental validation of nonextensive scaling law in confined granular media*, Phys. Rev. Lett. **115**, 238301 (2015).
- DUFF M.J., *How fundamental are fundamental constants ?*, Contemporary Physics (2014).
- DEPPMAN A., MEGIAS E. and MENEZES D.P., *Fractals, non-extensive statistics, and QCD*, Phys. Rev. D **101**, 034019 (2020).
- DOUGLAS P., BERGAMINI S. and RENZONI F., *Tunable Tsallis distributions in dissipative optical lattices*, Phys. Rev. Lett. **96**, 110601 (2006).
- ENCISO A. and TEMPESTA P., *Uniqueness and characterization theorems for generalized entropies*, J. Stat. Mech. 123101 (2017).
- GAZEAU J.-P. and TSALLIS C., *Möbius transforms, cycles and q -triplets in statistical mechanics*, Entropy **21**, 1155 (2019).

- GIBBS J.W., *Elementary Principles in Statistical Mechanics – Developed with Especial Reference to the Rational Foundation of Thermodynamics* (C. Scribner's Sons, New York, 1902 ; J.W. Gibbs, *The collected works*, Vol.1, *Thermodynamics*, (Yale University Press, New Haven, 1948) ; J.W. Gibbs, *Elementary Principles in Statistical Mechanics*, (OX Bow Press, Woodbridge, Connecticut, 1981).
- HALSLEY T.C., JENSEN M.H., KADANOFF L.P., PROCACCIA I. and SHRAIMAN B.I., *The characterization of strange sets*, Phys. Rev. A **33**, 1141 (1986).
- HENTSCHHEL H.G.E. and PROCACCIA I., *The infinite number of generalized dimensions of fractals and strange attractors*, Physica D **8**, 435 (1983).
- LE MÉHAUTÉ A., *Transfer processes in fractal media*, J. Statistical Physics **36**, 665 (1984).
- LI Y., LI N., TIRNAKLI U., LI B. and TSALLIS C., *Thermal conductance of the coupled-rotator chain : Influence of temperature and size*, EPL **117**, 60004 (2017).
- LUTZ E., *Anomalous diffusion and Tsallis statistics in an optical lattice*, Phys. Rev. A **67**, 051402(R) (2003).
- LUTZ E. and RENZONI F., *Beyond Boltzmann-Gibbs statistical mechanics in optical lattices*, Nature Physics **9**, 615-619 (2013).
- LYRA M. L. and TSALLIS C., *Nonextensivity and multifractality in low-dimensional dissipative systems*, Phys. Rev. Lett. **80**, 53 (1998).
- MANDELBROT B., *The Fractal Geometry of Nature* (W.H. Freeman, San Francisco, 1983).
- PALADIN G. and VULPIANI A., *Anomalous scaling laws in multifractal objects*, Phys. Rep. **156**, 147 (1987).
- PENROSE O., *Foundations of Statistical Mechanics : A Deductive Treatment* (Pergamon, Oxford, 1970), page 167.
- PLANCK M., *Über irreversible Strahlungsvorgänge*, Ann d. Phys. (4) (1900) 1, S. 69-122
- PLASTINO A.R. and PLASTINO A., *Non-extensive statistical mechanics and generalized Fokker-Planck equation*, Physica A **222**, 347 (1995).
- RENYI A., *On the dimension and entropy of probability distributions*, Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae **10**, 193-215 (1959).
- RENYI A., *On measures of information and entropy*, in *Proceedings of the Fourth Berkeley Symposium*, **1**, 547 (University of California Press, Berkeley, Los Angeles, 1961).
- RENYI A., *Probability theory* (North-Holland, Amsterdam, 1970).
- RUIZ G. and TSALLIS C., *Towards a large deviation theory for strongly correlated systems*, Phys. Lett. A **376**, 2451-2454 (2012).
- RUIZ G. and TSALLIS C., *Reply to Comment on "Towards a large deviation theory for strongly correlated systems"*, Phys. Lett. A **377**, 491-495 (2013).
- dos SANTOS R.J.V., *Generalization of Shannon's theorem for Tsallis entropy*, J. Math. Phys. **38**, 4104 (1997).
- SHANNON C.E., Bell System Tech. J. **27**, 379 and 623 (1948) ; *A Mathematical Theory of Communication*, Bell System Technical Journal **27**, 379-423 and 623-656 (1948) ; and *The Mathematical Theory of Communication* (University of Illinois Press, Urbana, 1949).
- TIRNAKLI U. and BORGES E.P., *The standard map : From Boltzmann-Gibbs statistics to Tsallis statistics*, Nature - Scientific Reports **6**, 23644 (2016).
- TIRNAKLI U., MARQUES M. and TSALLIS C., *Entropic extensivity and large deviations in the presence of strong correlations*, Physica D **431**, 133132 (2022).
- TIRNAKLI U. and TSALLIS C., *Extensive numerical results for integrable case of standard map*, Nonlinear Phenomena in Complex Systems **23** (2), 149-152 (2020).
- TIRNAKLI U., TSALLIS C. and AY N., *Approaching a large deviation theory for complex systems*, Nonlinear Dynamics **106**, 2537-2546 (2021).
- TOPSOE F., *Factorization and escorting in the game-theoretical approach to non-extensive entropy measures*, Physica A **365**, 91-95 (2006).
- TOUCHETTE H., *The large deviation approach to statistical mechanics*, Phys. Rep. **478**, 1-69 (2009).
- TOUCHETTE H. Touchette, *Comment on "Towards a large deviation theory for strongly correlated systems"*, Phys. Lett. A **377** (5), 436-438 (2013).
- TSALLIS C., *Possible generalization of Boltzmann-Gibbs statistics*, J. Stat. Phys. **52**, 479 (1988).
- TSALLIS C., *Dynamical scenario for nonextensive statistical mechanics*, Physica A **340**, 1-10 (2004).

- TSALLIS C., *Approach of complexity in nature : Entropic nonuniqueness*, Axioms **5**, 20 (2016).
- TSALLIS C., *Generalization of the possible algebraic basis of q -triplets*, Eur. Phys. J. Special Topics **226**, 455-466 (2017a).
- TSALLIS C., *Statistical mechanics for complex systems : On the structure of q -triplets*, in *Physical and Mathematical Aspects of Symmetries*, Proceedings of the 31st International Colloquium in Group Theoretical Methods in Physics, Eds. S. Duarte, J.-P. Gazeau, S. Faci, T. Micklitz, R. Scherer and F. Toppan, 51-60 (2017b, Springer).
- TSALLIS C., *Beyond Boltzmann-Gibbs-Shannon in physics and elsewhere*, Entropy **21**, 696 (2019).
- TSALLIS C., *Enthusiasm and skepticism : Two pillars of science – A nonextensive statistics case*, Physics **4**, 609-632 (2022).
- TSALLIS C., *Nonextensive Statistical Mechanics – Approaching a Complex World* - First Edition (Springer, New York, 2009) ; Second Edition (Springer, New York, 2022), in press.
- TSALLIS C., *Entropy*, Encyclopedia **2**, 264-300 (2022). Bibliographie disponible à [http ://tsallis.cat.cbpf.br/biblio.htm](http://tsallis.cat.cbpf.br/biblio.htm)
- TSALLIS C. and ABE S., *Advancing Faddeev : Math can deepen Physics understanding*, Physics Today **51**, 114 (1998).
- TSALLIS C. and BUKMAN D.J., *Anomalous diffusion in the presence of external forces : Exact time-dependent solutions and their thermostistical basis*, Phys. Rev. E **54**, R2197 (1996).
- TSALLIS C. and CIRTO L.J.L., *Black hole thermodynamical entropy*, Eur. Phys. J. C **73**, 2487 (2013).
- TSALLIS C., GELL-MANN M. and SATO Y., *Asymptotically scale-invariant occupancy of phase space makes the entropy S_q extensive*, Proc. Natl. Acad. Sc. USA **102**, 15377 (2005).
- UMAROV S. and TSALLIS C., *The limit distribution in the q -CLT for $q \geq 1$ is unique and can not have a compact support*, J. Physics A : Mathematical and Theoretical **49**, 415204 (2016).
- UMAROV S. and TSALLIS C., *Mathematical Foundations of Nonextensive Statistical Mechanics*, (World Scientific, Singapore, 2022).
- UMAROV S., TSALLIS C., GELL-MANN M. and STEINBERG S., *Generalization of symmetric α -stable Lévy distributions for $q > 1$* , J. Math. Phys. **51**, 033502 (2010).
- UMAROV S., TSALLIS C. and STEINBERG S., *On a q -central limit theorem consistent with nonextensive statistical mechanics*, Milan J. Math. **76**, 307 (2008).
- von NEUMANN J., *Thermodynamik quantenmechanischer Gesamtheiten*, Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Gottingen S. 273-291 (1927).
- WALTON D.B. and RAFELSKI J., *Equilibrium distribution of heavy quarks in Fokker-Planck dynamics*, Phys. Rev. Lett. **84**, 31 (2000).
- WATANABE S., *Knowing and Guessing* (Wiley, New York, 1969).
- WONG C.Y., WILK G., CIRTO L.J.L. and TSALLIS C., *From QCD-based hard-scattering to nonextensive statistical mechanical descriptions of transverse momentum spectra in high-energy pp and $p\bar{p}$ collisions*, Phys. Rev. D **91**, 114027 (2015).
- YALCIN G.C. and BECK C., *Generalized statistical mechanics of cosmic rays : Application to positron-electron spectral indices*, Scientific Reports **8**, 1764 (2018).